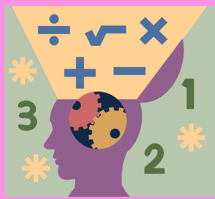
Motto:

„Matematica este ceea ce începe, ca şi Nilul,
în modestie şi se termină în magnific.”

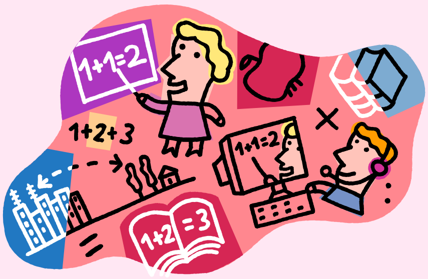
Calvin Colton

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$$

PARTEA I



ARITMETICĂ, ALGEBRĂ



$$\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} \le \sqrt{ab} \le \frac{a+b}{2}, \quad a, b \in R_+$$

Din cuprins:

A.I. NUMERE RAŢIONALE
B.I. NUMERE REALE
C.I. CALCUL ALGEBRIC
D.I. ECUAŢII ŞI INECUAŢII
E.I. ORGANIZAREA DATELOR

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{99}-\frac{1}{100}=\frac{1}{51}+\frac{1}{52}+\ldots+\frac{1}{100}$$

$$a\frac{b}{c}=\frac{a \cdot c+b}{c}, \; c \neq 0$$

$$a^2 - b^2 = (a-b)\cdot(a+b)$$

A.I. NUMERE RAŢIONALE

A.I.1. NOŢIUNEA DE FRACŢIE. TIPURI DE FRACŢII. RECAPITULARE

Fracţia este o pereche de numere naturale a şi b , cu $b \neq 0$, notată $\frac{a}{b}$, în care **a** se numeşte **numărător**, iar **b** se numeşte **numitor**. Fracţia ne arată în câte părţi, fragmente a fost împărţit întregul.

Fracţii echivalente

Prin ***reprezentări echivalente*** înţelegem aceeaşi parte dintr-un întreg. Pentru a stabili, dacă două fracţii $\frac{a}{b}$ şi $\frac{c}{d}$ sunt ***echivalente***, se calculează produsele $a \cdot d = b \cdot c$, având următoarele posibilităţi:

- dacă $a \cdot d = b \cdot c$, atunci ***fracţiile sunt echivalente***, adică $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$;
- dacă $a \cdot d \neq b \cdot c$, atunci ***fracţiile nu sunt echivalente***, adică $\frac{a}{b} \neq \frac{c}{d}$.

Exemple: Se doreşte să se studieze echivalenţa:

- $\frac{4}{8}$ şi $\frac{1}{2}$. Calculăm: $4 \cdot 2 = 1 \cdot 8 = 8$, $\Rightarrow \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$, deci fracţiile sunt echivalente;
- $\frac{3}{4}$ şi $\frac{6}{7}$. Calculăm: $3 \cdot 7 = 21$ şi $4 \cdot 6 = 24$, $21 \neq 24$ $\Rightarrow \frac{3}{4} \neq \frac{6}{7}$, deci fracţiile nu sunt echivalente.

Fracţii echiunitare, subunitare, supraunitare

O fracţie $\frac{a}{b}$ este ***supraunitară***, dacă $a > b,\ b \neq 0$; deci $\frac{a}{b} > 1$.

O fracţie $\frac{a}{b}$ este ***echiunitară***, dacă $a = b,\ b \neq 0$; deci $\frac{a}{b} = 1$.

O fracţie $\frac{a}{b}$ este ***subunitară***, dacă $a < b,\ b \neq 0$; deci $\frac{a}{b} < 1$.

Exemplu: $\frac{36}{31+x}$ este o fracţie

- supraunitară, pentru $36 > 31 + x \Rightarrow x < 5$,
- echiunitară, pentru $36 = 31 + x \Rightarrow x = 5$,
- subunitară, pentru $36 < 31 + x \Rightarrow x > 5$.

Amplificarea / simplificarea fracţiilor

A amplifica o fracţie $\frac{a}{b}$, $b \neq 0$ cu un număr natural $n \neq 0$, înseamnă a înmulţi atât numărătorul, cât şi numitorul cu numărul "n", adică $^{n)}\frac{a}{b} = \frac{n \cdot a}{n \cdot b}$. Se observă că fracţia obţinută este o fracţie echivalentă cu cea iniţială.

Exemplu: $^{3)}\frac{4}{7} = \frac{3 \cdot 4}{3 \cdot 7} = \frac{12}{21}$.

A simplifica o fracţie $\frac{a}{b}$, $b \neq 0$ cu un număr natural $n \neq 0$, divizor comun al numerelor a şi b, înseamnă a împărţi atât numărătorul, cât şi numitorul cu numărul "n", adică $\frac{a}{b}^{(n} = \frac{a : n}{b : n}$.
Se observă că fracţia obţinută este o fracţie echivalentă cu cea iniţială.

Exemplu: $\frac{36}{84}^{(4} = \frac{9}{21}^{(3} = \frac{3}{7}$ forma finală nu se mai poate simplifica.

Fracţii ireductibile / reductibile

Fracţia care nu se mai poate simplifica se numeşte ***fracţie ireductibilă*** .

O fracţie $\frac{a}{b}$, $b \neq 0$ este ***ireductibilă****,* dacă c.m.m.d.c (a,b) =1. Se mai poate spune că fracţiile ireductibile sunt acele fracţii care au numărătorii şi numitorii numere prime între ele.

Pentru a obţine o fracţie ireductibilă, se simplifică fracţia $\frac{a}{b}$, $b \neq 0$ cu c.m.m.d.c (a,b).

Exemplu: $\frac{16}{48}^{(16} = \frac{1}{3}$ este ireductibilă, deoarece c.m.m.d.c (1, 3) =1.

Exemplu: Să se simplifice fracţia $\frac{16}{124}$, astfel încât să obţinem o fracţie ireductibilă.

Rezolvare: $16 = 2^4$; $124 = 2^2 \cdot 31$, rezultă c.m.m.d.c (16, 124) = $2^2 = 4$.

Rezultă: $\frac{16}{124}^{(4} = \frac{4}{31}$.

Fracţia care se mai poate simplifica se numeşte ***fracţie reductibilă*** .

Exemplu: $\frac{25}{75}^{(25} = \frac{1}{3}$ forma finală nu se mai poate simplifica.

A.I.2. MULŢIMEA NUMERELOR RAŢIONALE. FORME DE SCRIERE ALE NUMERELOR RAŢIONALE

Un număr *x* se numeşte ***număr raţional***, dacă există o pereche de numere întregi (a, b), $b \neq 0$, astfel încât $x = \frac{a}{b}$.

Mulţimea numerelor raţionale se notează cu **Q** şi se defineşte astfel:

$$Q = \left\{ x \,\middle|\, \exists a, b \in Z, b \neq 0, \text{ astfel încât } x = \frac{a}{b} \right\}.$$

Un şir de fracţii echivalente reprezintă acelaşi număr raţional.
Numerele raţionale se notează prin fracţiile care le reprezintă.

Exemplu: Numărul raţional $\frac{2}{5}$ poate fi reprezentat prin oricare dintre fracţiile echivalente:

$\frac{4}{10}; \frac{6}{15}; \frac{8}{20}; ...; \frac{2n}{5n}, n \in N^*$

Observaţii:

- Are loc incluziunea: $N \subset Z \subset Q$;
- ***Mulţimea numerelor raţionale nenule*** este: $Q^* = Q \setminus \{0\}$;
- Un număr raţional pozitiv şi nenul se mai numeşte ***număr raţional strict pozitiv***. ***Mulţimea numerelor raţionale strict pozitive*** este:
$$Q_+^* = \left\{ \frac{a}{b} \,\middle|\, a \in N^*, b \in N^* \right\}$$
- Opusul numărului raţional strict pozitiv este ***numărul raţional strict negativ***. ***Mulţimea numerelor raţionale strict negative*** este:
$$Q_-^* = \left\{ -\frac{a}{b} \,\middle|\, a \in N^*, b \in N^* \right\}$$
- ***Inversul numărului raţional*** $\frac{a}{b}$ este notat cu $\left(\frac{a}{b}\right)^{-1}$. Deci, $\left(\frac{a}{b}\right)^{-1} = \frac{b}{a}$.
- ***Mulţimea numerelor raţionale*** este: $Q = Q_-^* \cup \{0\} \cup Q_+^*$.
- Orice număr $n \in N$ este un număr raţional pozitiv: $n = \frac{n}{1}$;

Cazuri particulare: $0 = \frac{0}{1}$ = număr raţional nul; 1 = numărul raţional unitate.

- Un număr raţional $\frac{a}{b}$, $a, b \in N$, $b \neq 0$ este natural, dacă şi numai dacă $b | a$;
- Numerele raţionale sunt numere reprezentate fie cu ajutorul fracţiilor ordinare, fie cu ajutorul fracţiilor zecimale finite sau periodice;
- Orice fracţie zecimală finită sau periodică poate fi transformată într-o fracţie ordinară.

Teoremă: Oricare ar fi $q \in Q^*$, există o unică fracţie ireductibilă $\frac{a}{b}$, $a \in Z$, $b \in N^*$, astfel încât $q = \frac{a}{b}$.

Transformarea fracţiilor ordinare în fracţii zecimale

Un număr raţional pozitiv reprezentat printr-o fracţie ireductibilă $\frac{a}{b}$, $a, b \in N^*, b \geq 2$, se transformă prin împărţire în:

- ***fracţie zecimală finită***, dacă descompunerea lui b în produs de factori primi conţine numai factorii 2 sau 5.

Exemple: $\frac{27}{8} = \frac{27}{2^3} = 3{,}375$; $\frac{167}{50} = \frac{167}{2 \cdot 5^2} = 3{,}34$.

- ***fracţie zecimală periodică simplă***, dacă descompunerea lui b în produs de factori primi nu conţine nici factorul prim 2, nici factorul prim 5.

Exemple: $\frac{128}{77} = \frac{128}{7 \cdot 11} = 1{,}(662337)$; $\frac{33}{9} = \frac{33^{(3}}{3^2} = \frac{11}{3} = 3{,}(6)$.

- ***fracţie zecimală periodică mixtă***, dacă descompunerea lui b în produs de factori primi conţine cel puţin unul din factorii primi 2 sau 5 şi cel puţin un alt factor prim diferit de 2 şi de 5.

Exemple: $\frac{2}{105} = \frac{2}{3 \cdot 5 \cdot 7} = 0{,}0(190476)$; $\frac{203}{12} = \frac{203}{3 \cdot 2^2} = 16{,}91(6)$.

Citim, ***de exemplu***:

$$\overbrace{16}^{\textit{partea întreagă}},\ \underbrace{91}_{\textit{partea neperiodică}}\ \underbrace{(6)}_{\textit{perioada}}$$

Transformarea fracţiilor zecimale în fracţii ordinare

- ***transformarea fracţiilor zecimale finite în fracţii ordinare:***

$$\overline{a_0,a_1a_2...a_k} = a_0\frac{\overline{a_1a_2...a_k}}{10^k},\ a_0 \in N,\ a_1, a_2, ..., a_k = \text{cifre},$$

Exemple: $0{,}007 = \frac{7}{1000} = \frac{7}{10^3}$; $7{,}54 = \frac{754}{100}$.

- ***transformarea fracţiilor zecimale periodice simple în fracţii ordinare:***

$$\overline{b_0,(b_1b_2...b_m)} = b_0\frac{\overline{b_1b_2...b_m}}{\underbrace{99...9}_{\text{m cifre}}},\ b_0 \in N,\ b_1, b_2, ..., b_m = \text{cifre},$$

Exemple: $0,(45) = \frac{45^{(9}}{99} = \frac{5}{11}$; $6,(7) = 6\frac{7}{9}$.

- ***transformarea fracţiilor zecimale periodice mixte în fracţii ordinare:***

$$\overline{c_0,a_1a_2...a_k(b_1b_2...b_m)} = c_0\frac{\overline{a_1a_2...a_kb_1b_2...b_m} - \overline{a_1a_2...a_k}}{\underbrace{99...9}_{m\text{ cifre}}\ \underbrace{00...0}_{k\text{ cifre}}},$$

$c_0 \in N,\ a_1,...,a_k,b_1,...,b_m = \text{cifre},$

Exemple: $0,(88) = \frac{88^{(11}}{99} = \frac{8}{9}$; $\quad 2,1(5) = 2\frac{15-1}{90} = 2\frac{14}{90} = \frac{2\cdot 90+14}{90} = \frac{194}{90}$;

$0,26(573) = \frac{26573-26}{99900} = \frac{26547}{99900}$.

A.I.3. REPREZENTAREA NUMERELOR RAŢIONALE PE AXA NUMERELOR. COMPARAREA NUMERELOR RAŢIONALE

Reprezentarea pe axă a numerelor raţionale

Numerele pot fi reprezentate pe ***axa numerelor*** care este o dreaptă pe care se fixează originea (un punct O), un sens pozitiv (reprezentat printr-o săgeată, care se ia spre dreapta) şi o unitate de măsură (u.m. – un segment unitate).

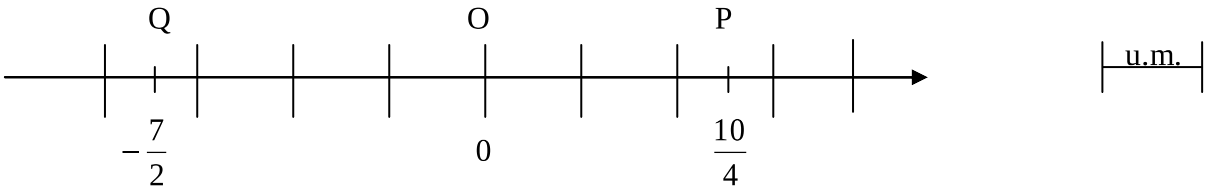
M(x) = x este abcisa punctului M , unde $x \in Q$, iar M este un punct de pe axa numerelor.

Numărul raţional 0 corespunde originii, adică punctului O; se scrie O(0).

Un număr raţional pozitiv a>0 se reprezintă printr-un punct P, aflat pe semidreapta care indică sensul pozitiv, ales, astfel încât OP = a.

Un număr raţional negativ b>0 se reprezintă printr-un punct Q, aflat pe semidreapta care indică sensul negativ, ales, astfel încât OQ = - b.

Exemplu: Se reprezintă pe axă punctele O(0), $P\left(\frac{10}{4}\right)$, $Q\left(-\frac{7}{2}\right)$. Deci, avem: OP = $\frac{10}{4}$, OQ = $\frac{7}{2}$.



Modulul unui număr raţional

Definiţie: Numim **modulul** sau ***valoarea absolută*** a unui număr raţional $x \in Q$, numărul notat $|x|$, definit astfel:

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{dacă } x > 0 \\ 0, & \text{dacă } x = 0 \\ -x, & \text{dacă } x < 0 \end{cases}.$$

Exemple: $\left|-\frac{7}{3}\right| = \frac{7}{3}$; $\left|+\frac{8}{9}\right| = \frac{8}{9}$; $|-5,8| = \frac{58}{10}$; $|5| = 5$.

Proprietăţi:

- $|x| \geq 0,\ \forall x \in Q$; $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$;
- $|x| = |-x|$, $\forall x \in Q$;
- $|x \pm y| \leq |x| + |y|$, $\forall x, y \in Q$;

- $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|, \forall x, y \in Q;$;
- $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}, \ \forall x, y \in Q^*;$
- $\big||x| - |y|\big| \le |x - y|, \ \forall x, y \in Q.$

Precizare: Abscisa unui punct P de pe axa numerelor se mai notează şi x_P. Dacă $P(x_P)$ şi $Q(x_Q)$ sunt două puncte pe axa numerelor, lungimea segmentului [PQ] este $PQ = |x_P - x_Q|$;
în cazul exemplului anterior avem: $PQ = \left|\frac{10}{4} + \frac{7}{2}\right| = 6$ sau $QP = \left|-\frac{7}{2} - \frac{10}{4}\right| = 6$

Ordonarea numerelor raţionale

Fie două numere raţionale pozitive $\frac{a}{b}$ şi $\frac{c}{d}$, cu $a, b, c, d \in N$, $b \ne 0$, $d \ne 0$ şi ***relaţia de ordine*** "<" (mai mic). Avem: $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$, dacă $a \cdot d < b \cdot c$.

Proprietăţi:

- Oricare ar fi $a, b, k \in N^*$, atunci $\frac{a}{b} < \frac{k}{b}$, dacă şi numai dacă $a < k$;
- Oricare ar fi $a, b, k \in N^*$, atunci $\frac{a}{b} < \frac{a}{k}$, dacă şi numai dacă $b > k$.

Relaţia de ordine "<" ne permite să ordonăm două numere raţionale. Dacă numitorii sunt aceeaşi se procedează ca şi în cazul anterior, dacă numitorii sunt diferiţi trebuie prima dată să aducem numerele la acelaşi numitor comun, apoi comparăm numărătorii, iar fracţia mai mică va fi cea care va avea numărătorul mai mic.

Exemplu: Vrem să comparăm numerele: $\frac{8}{7}$ şi $\frac{9}{14}$.

c.m.m.m.c (7; 14) = 14

$^{2)}\frac{8}{7} = \frac{16}{14}$ şi $\frac{9}{14}$.

Rezultă: $\frac{9}{14} < \frac{16}{14}$.

Putem utiliza ca ***relaţie de ordonare*** şi ">" (mai mare).

Exemplu: $\frac{16}{14} > \frac{9}{14}$

Extindem relaţia de ordine de la numerele raţionale pozitive la numerele raţionale.

Definiţie: Fie $a, b \in Z$, $b \ne 0$, atunci:

- $\frac{a}{b} > 0$, dacă a şi b au acelaşi semn;
- $\frac{a}{b} < 0$, dacă a şi b au semne contrare.

Fie $a, b \in Z^*,\ c, d \in N^*$, atunci:

- $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$, dacă $\left| \begin{array}{l} \frac{a}{b} > 0,\ \frac{c}{d} > 0,\ ad < bc \quad \text{sau} \\ \frac{a}{b} < 0,\ \frac{c}{d} > 0 \quad \text{sau} \\ \frac{a}{b} < 0,\ \frac{c}{d} < 0 \ \text{şi} \ \ ad < bc \ \text{sau} \ \left|\frac{a}{b}\right| > \left|\frac{c}{d}\right| \end{array} \right.$

Exemple: $\frac{3}{9} < \frac{5}{8}$, deoarece $\frac{3}{9} > 0,\ \frac{5}{8} > 0,\ 3 \cdot 8 < 5 \cdot 9$;

$-\frac{2}{7} < \frac{4}{9}$, deoarece $-\frac{2}{7} < 0,\ \frac{4}{9} > 0$;

$-\frac{3}{2} < -\frac{2}{3}$, deoarece $-\frac{3}{2} < 0,\ -\frac{2}{3} < 0,\ -9 < -4$ sau $\left|-\frac{3}{2}\right| > \left|-\frac{2}{3}\right|$.

În mod similar, pentru $a, b \in Z^*,\ c, d \in N^*$, avem:

- $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$, dacă $\left| \begin{array}{l} \frac{a}{b} > 0,\ \frac{c}{d} > 0,\ ad > bc \quad \text{sau} \\ \frac{a}{b} > 0,\ \frac{c}{d} < 0 \quad \text{sau} \\ \frac{a}{b} < 0,\ \frac{c}{d} < 0 \ \text{şi} \ \ ad > bc \ \text{sau} \ \left|\frac{a}{b}\right| < \left|\frac{c}{d}\right| \end{array} \right.$

Exemple: $\frac{9}{8} > \frac{5}{7}$, deoarece $\frac{9}{8} > 0,\ \frac{5}{7} > 0,\ \frac{9}{8} > 0,\ 7 \cdot 9 > 5 \cdot 8$;

$\frac{2}{7} > -\frac{1}{3}$, deoarece $\frac{2}{7} > 0,\ -\frac{1}{3} < 0$;

$-\frac{3}{4} > -\frac{4}{3}$, deoarece $-\frac{3}{4} < 0,\ -\frac{4}{3} < 0,\ -9 > -16$ sau $\left|-\frac{3}{4}\right| < \left|-\frac{4}{3}\right|$.

Relaţia de ordine $"\leq"$

Dacă $x, y \in Q$, cu $x < y$ sau $x = y$, spunem că x este mai mic sau egal cu y şi notăm: $x \leq y$.

Dacă $x, y \in Q$, cu $x > y$ sau $x = y$, spunem că x este mai mare sau egal cu y şi notăm: $x \geq y$.

Adică,

- dacă $a, c \in Z,\ b, d \in Z^*$, atunci $\frac{a}{b} \leq \frac{c}{d}$, dacă $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ sau $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.
- dacă $a, c \in Z,\ b, d \in Z^*$, atunci $\frac{a}{b} \geq \frac{c}{d}$, dacă $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$ sau $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

Proprietăţi:

- reflexivitatea: $x \le x,\ \forall x \in Q$;
- antisimetria: $\forall x, y$, dacă $x \le y,\ y \le x \Rightarrow x = y$;
- tranzitivitatea: $\forall x, y, z$, dacă $x \le y,\ y \le z \Rightarrow x \le z$;
- $\forall x, y$, inegalitatea $x \le y$ este echivalentă cu:

$$x + z \le y + z,\ \forall z \in Q; \quad x \cdot z \le y \cdot z,\ \forall z > 0; \quad x \cdot z \ge y \cdot z,\ \forall z < 0.$$

- dacă $x \le y,\ z \le t$, atunci $x + z \le y + t$;
- dacă $x \ge y \ge 0$ şi $z \ge t \ge 0$, atunci $x \cdot z \ge y \cdot t \ge 0$.

Opusul unui număr raţional

Definiţie: Două numere se numesc opuse, dacă le corespund pe axa numerelor puncte simetrice faţă de originea axei. Opusul unui număr raţional **r** se notează **–r**.

Exemple: Opusele numerelor $\frac{6}{9}$, respectiv $-\frac{5}{4}$ sunt $-\frac{6}{9}$, respectiv $\frac{5}{4}$.

Partea întreagă şi partea fracţionară a unui număr raţional

Partea întreagă a numărului raţional x, notată cu [x], este cel mai mare număr întreg mai mic sau egal cu x. Numărul $\{x\} = x - [x]$ se numeşte partea fracţionară a numărului raţional x.

Exemple: $[3{,}28] = 3$, deoarece $3 \le 3{,}28 < 4$ şi $\{3{,}28\} = 3{,}28 - [3{,}28] = 3{,}28 - 3 = 0{,}28$;

$[-3{,}28] = -4$, deoarece $-4 \le -3{,}28 < -3$ şi $\{-3{,}28\} = -3{,}28 - [-3{,}28] = -3{,}28 - (-4) = 0{,}72$.

Observaţii:

- dacă $r = a_0, a_1 a_2 a_3 \ldots$, unde $a_0 \in N$, este un număr raţional pozitiv scris ca fracţie zecimală, atunci partea întreagă a numărului *r* este a_0, iar partea fracţionară a numărului *r* este $\overline{0, a_1 a_2 a_3 \ldots}$;
- Dacă $r = -\overline{a_0, a_1 a_2 a_3 \ldots}$, unde $a_0 \in N$, este un număr raţional pozitiv scris ca fracţie zecimală, atunci partea întreagă a numărului *r* este $-(a_0 + 1)$, iar partea fracţionară a numărului *r* este 1- $\overline{0, a_1 a_2 a_3 \ldots}$.

Exemple: $[5{,}16] = 5$, iar $\{5{,}16\} = 5{,}16 - 5 = 0{,}16$;

$[-12{,}84] = -13$, iar $\{-12{,}84\} = -12{,}84 - (-13) = 0{,}16$.

A.I.4. OPERAŢII CU NUMERE RAŢIONALE

Adunarea numerelor raţionale

Adunarea numerelor raţionale este operaţia prin care oricărei perechi de numere raţionale **a** şi **b** i se asociază un număr raţional, notat **a+b**, numit *suma numerelor* **a** şi **b**. Numerele **a** şi **b** se numesc *termenii sumei*. Suma a două numere raţionale e un număr raţional.

Operaţia de adunare

termen	plus	termen	egal	sumă
a	+	b	=	a+b

Suma **a+b** se calculează astfel:

- dacă numerele **a** şi **b** au acelaşi semn, avem următoarele situaţii:
  - $|a+b| = |a| + |b|$;
  - semnul sumei **a+b** este semnul comun numerelor **a** şi **b**.
- dacă numerele **a** şi **b** nu au acelaşi semn, avem următoarele situaţii:
  - $|a+b| = |a| - |b|$;
  - semnul sumei **a+b** este semnul numărului cu modulul mai mare dintre numerele **a** şi **b**.

Exemple: $\left(-\frac{8}{23}\right)+\left(-\frac{7}{23}\right)=-\frac{15}{23}$ cu $\left|\left(-\frac{8}{23}\right)+\left(-\frac{7}{23}\right)\right|=\left|\left(-\frac{8}{23}\right)\right|+\left|\left(-\frac{7}{23}\right)\right|=\left|-\frac{15}{23}\right|=\frac{15}{23}$.

$\left(-\frac{8}{23}\right)+\left(+\frac{7}{23}\right)=-\frac{1}{23}$ cu $\left|-\frac{8}{23}\right|>\left|\frac{7}{23}\right|$ şi $\left|\left(-\frac{8}{23}\right)+\left(-\frac{7}{23}\right)\right|=\left|\left(-\frac{8}{23}\right)\right|-\left|\left(-\frac{7}{23}\right)\right|=\left|-\frac{1}{23}\right|=\frac{1}{23}$.

Proprietăţile adunării numerelor raţionale:

- asociativitatea: $\forall a,b,c \in Q,\ (a+b)+c = a+(b+c)$;
- elementul neutru la adunare este 0: $\forall a \in Q, \exists\, 0 \in Q$, a.î. $a+0=0+a=a$;
- opusul numărului a este -a: $\forall a \in Q$, $\exists -a \in Q$, a.î. $a+(-a)=0$;
- comutativitatea: $\forall a,b \in Q$, $a+b=b+a$.

Observaţii:

- Dacă cele două numere raţionale au acelaşi numitor, se adună numărătorii şi se păstrează numitorul;

Exemplu: $\frac{17}{3}+\frac{2}{3}=\frac{19}{3}$.

- Dacă numerele raţionale au numitori diferiţi, se aduc la acelaşi numitor comun şi se aplică regula anterioară;

Exemplu: $\frac{8}{3}+\frac{6}{5}={}^{5)}\frac{8}{3}+{}^{3)}\frac{6}{5}=\frac{40+18}{15}=\frac{58}{15}$.

Scăderea numerelor raţionale

Scăderea numerelor raţionale este operaţia prin care oricărei perechi de numere raţionale **a** şi **b** i se asociază un număr raţional, notat **a-b**, numit *diferenţa numerelor* **a** şi **b**. Numerele **a** şi **b** se numesc *descăzut,* respectiv *scăzător*. Diferenţa a două numere raţionale e un număr raţional.

Operaţia de scădere

descăzut	minus	scăzător	egal	diferenţă
a	-	b	=	a-b = a + (-b)

Observaţii:

- Dacă cele două numere raţionale au acelaşi numitor, se scad numărătorii şi se păstrează numitorul, adică $\frac{m}{n}-\frac{p}{n}=\frac{m-p}{n},\ n\neq 0$.

Exemplu: $\frac{13}{3}-\frac{5}{3}=\frac{8}{3}$

- Dacă numerele raţionale au numitori diferiţi, se aduc la acelaşi numitor comun şi se aplică regula anterioară,

Exemplu: $\frac{7}{3}-\frac{3}{5}={}^{5)}\frac{7}{3}-{}^{3)}\frac{3}{5}=\frac{35-9}{15}=\frac{26}{15}$

Observaţie: Adunarea şi scăderea numerelor raţionale sunt operaţii de ordinul întâi.

Scoaterea întregilor din fracţie

Regulă: Pentru a scoate întregii dintr-un număr raţional $\frac{a}{b}$, împărţim numărătorul la numitor; câtul **C** reprezintă întregii, iar restul **r** reprezintă numărătorul părţii fracţionare.

$$\frac{a}{b}, a>b,\ b\neq 0,\ \ a:b=C,\ rest=r \Rightarrow \frac{a}{b}=C\frac{r}{b}=\text{partea fracţionară.}$$

Deci, se aplică teorema împărţirii cu rest, astfel:

$\frac{a}{b}=\frac{b\cdot C+r}{b}=C+\frac{r}{b}=C\frac{r}{b}$

Această regulă se aplică la fracţiile supraunitare.

Exemplu: $\frac{484}{12}=40\frac{4}{12}$**,** deoarece 484:12=40, rest =4.

Introducerea întregilor în fracţie

Regulă: $a\frac{b}{c}=\frac{a\cdot c+b}{c},\ c\neq 0$

Exemplu: $6\frac{3}{7}=\frac{6\cdot 7+3}{7}=\frac{45}{7}$

Înmulţirea numerelor raţionale

Înmulţirea numerelor raţionale este operaţia prin care oricărei perechi de numere raţionale **a** şi **b** i se asociază un număr raţional, notat **a·b**, numit *produsul numerelor* **a** şi **b**. Numerele **a** şi **b** se numesc *factori*.

Operaţia de înmulţire

factor	ori	factor	egal	înmulţire
a	·	**b**	**=**	**a·b**

Înmulţirea a două numerelor raţionale se face prin înmulţirea numărătorilor între ei, respectiv a numitorilor între ei.

Exemplu: $\frac{3}{7}\cdot\frac{4}{5}=\frac{3\cdot 4}{7\cdot 5}=\frac{12}{35}$

Observaţii:

- produsul are semnul "+" , dacă cei doi factori au acelaşi semn, adică dacă a>0 şi b>0 sau a<0 şi b<0, atunci $a \cdot b = |a| \cdot |b|$;
- produsul are semnul "-" , dacă cei doi factori au semne diferite, adică dacă a>0 şi b<0 sau a<0 şi b>0, atunci $a \cdot b = -|a| \cdot |b|$;
- produsul este egal cu 0, adică $a \cdot b = 0$, dacă a=0 sau b=0.

Exemple:

- $\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} = \frac{8}{15}$; $\left(-\frac{3}{4}\right) \cdot \left(-\frac{5}{7}\right) = \frac{15}{28}$;
- $\frac{3}{28} \cdot \left(-\frac{7}{5}\right) = -\frac{21}{140}$; $(-4) \cdot \frac{3}{16} = -\frac{3}{4}$;
- $0 \cdot \frac{5}{3} = 0$; $\left(-\frac{2}{7}\right) \cdot 0 = 0$.

Reguli de calcul:

- $\forall a \in Q,\ a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$;
- $\forall a \in Q,\ a \cdot (-1) = (-1) \cdot a = -a$;
- $\forall a, b \in Q,\ (-a) \cdot b = a \cdot (-b) = -a \cdot b;\ (-a) \cdot (-b) = a \cdot b$ (*regula semnelor*).

Regula semnelor sintetizată tabelar

·	+	-
+	+	-
-	-	+

Proprietăţile înmulţirii numerelor raţionale:

- asociativitatea: $\forall a, b, c \in Q,\ (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$;
- elementul neutru la înmulţire este 1: $\forall a \in Q, \exists\, 1 \in Q$, a.î. $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$;
- comutativitatea: $\forall a, b \in Q,\ a \cdot b = b \cdot a$;
- distributivitatea înmulţirii faţă de adunare şi scădere: $\forall a, b, c \in Q,\ a \cdot (b \pm c) = a \cdot b \pm a \cdot c$.

Alte proprietăţi:

- $\forall a \in Q^*$ are un invers: $a^{-1} = \frac{1}{a}$, cu proprietatea că: $a \cdot \frac{1}{a} = \frac{1}{a} \cdot a = 1$;
- $\forall a, b, c \in Q$, dacă $a = b$, atunci $a \cdot c = b \cdot c$;
- $\forall a, b, c \in Q$, dacă $c \neq 0$ şi $a \cdot c = b \cdot c$, atunci $a = b$;
- $\forall a, b, c \in Q$, dacă $a = b$ şi $c = d$, atunci $a \cdot c = b \cdot c$;
- Dacă într-un produs de numere raţionale numărul factorilor negativi este impar, atunci produsul este negativ, iar dacă numărul factorilor negativi este par, atunci produsul este pozitiv.

Exemple:

- $\left(-\frac{2}{3}\right) \cdot \left(-\frac{4}{5}\right) \cdot \left(-\frac{6}{4}\right) \cdot \left(-\frac{5}{4}\right) \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) = -\frac{6^{(2}}{4} = -\frac{3}{2}$;
- $\left(-\frac{2}{3}\right) \cdot \left(-\frac{4}{5}\right) \cdot \left(-\frac{6}{4}\right) \cdot \left(-\frac{5}{4}\right) \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) \cdot \left(-\frac{4}{6}\right) = +1$.

Factor comun

Exemple:

- $\frac{2}{3} + \frac{4}{6} + \frac{6}{9} = \frac{2}{3} \cdot \left(1 + \frac{2}{2} + \frac{3}{3}\right) = 2$;

- Dacă $a, b, c \in Q$, $a \cdot b = \frac{3}{7}$ şi $a \cdot c = -\frac{3}{14}$, atunci

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c = \frac{3}{7} + \left(-\frac{3}{14}\right) = \frac{6-3}{14} = \frac{3}{14},$$

$$a \cdot (b - c) = a \cdot b - a \cdot c = \frac{3}{7} - \left(-\frac{3}{14}\right) = \frac{6+3}{14} = \frac{9}{14}.$$

Împărţirea numerelor raţionale

Împărţirea numerelor raţionale este operaţia prin care oricărei perechi de numere raţionale **a** şi **b** $\neq 0$ i se asociază un număr raţional, notat **a**:**b** = $\frac{a}{b} = a \cdot b^{-1}$, numit *câtul numerelor* **a** şi **b**. Numerele **a** şi **b** se numesc *factorii câtului*. Câtul a două numere raţionale este tot un număr raţional.

Operaţia de împărţire

factor	ori	factor	egal	împărţire
a	**:**	**b**	**=**	**a:b**

Regula semnelor sintetizată tabelar

:	+	-
+	+	-
-	-	+

Exemple: $\frac{27}{9} = 3$; $\frac{-30}{5} = -6$; $\frac{-32}{-4} = 8$; $\frac{42}{-6} = -7$.

Observaţii:

- $\forall a \in Q$, operaţia $\frac{a}{0}$ nu are sens;
- $\forall a, b, c, d \in Q$, a.î. $a = b,\ c = d,\ c \neq 0,\ d \neq 0$ şi există câtul dintre a şi c, respectiv b şi d, atunci $a : c = b : d$.

Observaţie: Înmulţirea şi împărţirea numerelor raţionale sunt operaţii de ordinul al doilea.
Dacă avem într-un exerciţiu înmulţiri şi împărţiri, ele se efectuează în ordinea scrisă.

Exemplu: $\left[\left(-\frac{2}{3}\right) \cdot (-3) \cdot \left(-\frac{6}{3}\right)\right] : (-2) = \left(-\frac{12}{3}\right) : (-2) = 2$.

Ridicarea la putere cu exponent întreg a unui număr raţional

Puterea cu exponent natural a unui număr raţional

Dacă $q \in Q,\ n \in N^*$, atunci $q^n = \underbrace{q \cdot q \cdot \ldots \cdot q}_{\text{n factori}}$, iar *q* este *baza,* iar *n* este *exponentul* puterii.

În acest sens, q^n poartă numele de puterea *n* a numărului raţional *q*.
Prin convenţie:

- $q^0 = 1,\ q \neq 0$;
- 0^0 - nu are sens.

Exemple:

- Puterea a treia a numărului $-\frac{5}{7}$ este $\left(-\frac{5}{7}\right)^3=\left(-\frac{5}{7}\right)\cdot\left(-\frac{5}{7}\right)\cdot\left(-\frac{5}{7}\right)=-\frac{125}{343}$;
- Puterea a şasea a numărului $\frac{2}{3}$ este $\left(\frac{2}{3}\right)^6=\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}=\frac{64}{729}$.

Puterea cu exponent întreg negativ a unui număr raţional

Fie $q\in Q^*$, $n\in N^*$. Prin definiţie, $q^{-n}=\frac{1}{q^n}$.

Exemple:

- $\left(\frac{2}{7}\right)^{-1}=\frac{1}{\frac{2}{7}}=\frac{7}{2}$;
- $(-2)^{-3}=\frac{1}{(-2)^3}=\frac{1}{(-2)\cdot(-2)\cdot(-2)}=-\frac{1}{8}$.

Reguli de calcul cu puteri

- $a^m\cdot a^n=a^{m+n},\ \forall a\in Q^*,\forall m,n\in Z;$
- $(a^m)^n=a^{m\cdot n},\ \forall a\in Q^*,\forall m,n\in Z;$
- $a^m:a^n=a^{m-n},\ \forall a\in Q^*,\forall m,n\in Z;$
- $(a\cdot b)^n=a^n\cdot b^n,\forall a\in Q^*,\forall n\in Z;$
- $(a:b)^n=a^n:b^n,\forall a\in Q^*,\forall n\in Z;$
- $(-a)^{2n}=a^{2n}$, $(-a)^{2n+1}=-a^{2n+1}$, $\forall a\in Q^*,\forall n\in Z$.

Exemple:

- $\left(\frac{1}{3}\right)^3\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^1\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^0=\left(\frac{1}{3}\right)^{3+2+1+0}=\left(\frac{1}{3}\right)^6=\frac{1}{3^6}=\frac{1}{729}$;
- $\left[\left(-\frac{1}{4}\right)^3\right]^2=\left(\frac{1}{4}\right)^6=\frac{1}{4^6}=\frac{1}{4096}$;
- $\left(\frac{2}{3}\right)^{-3}=\frac{1}{\left(\frac{2}{3}\right)^3}=\frac{1}{\frac{8}{27}}=\frac{27}{8}$;
- $\left(-\frac{3}{7}\right)^{-2}=\left(-\frac{7}{3}\right)^2=\frac{(-7)^2}{3^2}=\frac{49}{9}$;
- $\underbrace{\left(-\frac{11}{10}\right)\cdot\left(-\frac{11}{10}\right)\cdot\ldots\cdot\left(-\frac{11}{10}\right)}_{2012\ \text{factori}}=\left(-\frac{11}{10}\right)^{2012}=\left(\frac{11}{10}\right)^{2012}$;
- $\underbrace{\left(-\frac{2}{3}\right)\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)\cdot\ldots\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)}_{2011\ \text{factori}}=\left(-\frac{2}{3}\right)^{2011}$.

Observaţie: Ridicarea la putere este o operaţie de ordinul trei.

Ordinea efectuării operaţiilor cu numere raţionale

Am pomenit în trei observaţii anterioare că:

- *adunarea şi scăderea numerelor raţionale sunt operaţii de ordinul întâi;*
- *înmulţirea şi împărţirea numerelor raţionale sunt operaţii de ordinul al doilea;*
- *ridicarea la putere este o operaţie de ordinul trei.*

Reguli de efectuare a ordinii operaţiilor

- dacă într-o expresie apar operaţii de acelaşi ordin, acestea se efectuează în ordinea în care sunt scrise;

Exemple:

- $-25+20-5=(-25+20)-5=-5-5=-10$;
- $\left(-\frac{2}{7}\right)\cdot\frac{7}{3}:\frac{2}{3}=\left[\left(-\frac{2}{7}\right)\cdot\frac{7}{3}\right]:\frac{2}{3}=\left(-\frac{2}{3}\right):\frac{2}{3}=-1$;
- $\left[\left(-\frac{5}{2}\right)^2\right]^{-3}=\left[\left(\frac{5}{2}\right)^2\right]^{-3}=\left(\frac{5}{2}\right)^{-6}=\left(\frac{2}{5}\right)^6=\frac{2^6}{5^6}=\frac{64}{15625}$.
- dacă într-o expresie apar operaţii de ordin diferit, atunci se efectuează mai întâi operaţiile de ordin superior către cele de ordin inferior, adică ordinul III, II, I;

Exemple:

- $2^0+(-2)^0+\left(\frac{3}{4}\right)^2-\frac{3^2}{4^2}=1+1+\frac{3^2}{4^2}-\frac{3^2}{4^2}=2$;
- $(3,7)\cdot(3,7)^2:(3,7)^3-0,5\cdot 2+(1,4\cdot 5)^2=(3,7)^3:(3,7)^3-0,5\cdot 2+(1,4)^2\cdot 25=$
  $=1-\frac{5}{10}\cdot 2+\left(\frac{14}{10}\right)^2\cdot 25=1-\frac{5}{10}\cdot 2+\frac{49}{25}\cdot 25=1-1+49=49$;
- $-\frac{1}{7}\cdot\frac{14}{3}-\left(\frac{1}{3}\right)^2+\frac{13}{6}:\frac{26}{18}=-\frac{1}{7}\cdot\frac{14}{3}-\frac{1}{9}+\frac{13}{6}:\frac{26}{18}=-\frac{2}{3}-\frac{1}{9}+\frac{13}{6}\cdot\frac{18}{26}=-\frac{2}{3}-\frac{1}{9}+\frac{3}{2}=$
  $=\frac{-12-2+27}{18}=\frac{13}{18}$.
- dacă într-o expresie apar paranteze se porneşte calculul de la parantezele rotunde, la cele drepte, apoi la acolade, cu respectarea ordinii efectuării operaţiilor.

Exemple:

- $2\frac{4}{5}\cdot\left(2\frac{7}{10}\cdot\frac{20}{9}-\frac{14}{25}:1\frac{3}{25}\right)=\frac{14}{5}\cdot\left(\frac{27}{10}\cdot\frac{20}{9}-\frac{14}{25}:\frac{28}{25}\right)=\frac{14}{5}\cdot\left(\frac{27}{10}\cdot\frac{20}{9}-\frac{14}{25}\cdot\frac{25}{28}\right)=$
  $=\frac{14}{5}\cdot\left(6-\frac{1}{2}\right)=\frac{14}{5}\cdot\frac{11}{2}=\frac{77}{5}$;
- $0,24+\left\{1\frac{3}{25}:\left[1\frac{2}{3}\cdot 2\frac{2}{5}-\left(\frac{4}{5}\right)^2\right]\right\}=0,24+\left[1\frac{3}{25}:\left(1\frac{2}{3}\cdot 2\frac{2}{5}-\frac{16}{25}\right)\right]=$
  $=0,24+\left[1\frac{3}{25}:\left(\frac{5}{3}\cdot\frac{12}{5}-\frac{16}{25}\right)\right]=0,24+\left[1\frac{3}{25}:\left(4-\frac{16}{25}\right)\right]=0,24+\left[1\frac{3}{25}:\left(\frac{100}{25}-\frac{16}{25}\right)\right]=$.
  $=0,24+\left(1\frac{3}{25}:\frac{84}{25}\right)=0,24+\left(\frac{28}{25}\cdot\frac{25}{84}\right)=0,24+\frac{28}{84}=\frac{24}{100}+\frac{1}{3}=\frac{6}{25}+\frac{1}{3}=\frac{43}{75}$

Media aritmetică şi media aritmetică ponderată a numerelor raţionale

Fie a şi b $\in \mathbb{Q}$. ***Media aritmetică*** este numărul care se obţine împărţind la 2 suma lor:

$$m_a = \frac{a+b}{2}.$$

Exemplu: Media aritmetică a numerelor: $\frac{1}{3}$ şi $\frac{1}{4}$ este $m_a = \frac{\frac{1}{3}+\frac{1}{4}}{2} = \frac{7}{12} : 2 = \frac{7}{12} \cdot \frac{1}{2} = \frac{7}{24}$

Media aritmetică a **n** numere raţionale se obţine împărţind suma acestor numere la **n**.

Fie $a_1, a_2, ..., a_n$, n numere raţionale. Media lor aritmetică este numărul care se obţine împărţind la n suma lor, adică:

$$m_a = \frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n}$$

Exemplu: Media aritmetică a trei numere este $\frac{5}{6}$. Calculaţi suma numerelor.

$\frac{a+b+c}{3} = \frac{5}{6} \Rightarrow a+b+c = \frac{5}{2}$

Media aritmetică ponderată este dată de relaţia

$$m_p = \frac{a_1 \cdot p_1 + a_2 \cdot p_2 + ... + a_n \cdot p_n}{p_1 + p_2 + ... + p_n}$$

unde: $a_1, a_2, ..., a_n$ sunt numere raţionale pozitive,

$p_1, p_2, ..., p_n$ sunt ponderile numerelor, adică de câte ori se repetă numerele.

Exemplu: Media aritmetică ponderată a numerelor $\frac{1}{5}$ şi $\frac{1}{3}$ cu ponderile 5 şi 6 este:

$$m_p = \frac{\frac{1}{5} \cdot 5 + \frac{1}{3} \cdot 6}{5+6} = \frac{3}{11}.$$

A.I.5. ECUAŢII CU COEFICIENŢI RAŢIONALI

Forma generală a unei ecuaţii cu coeficienţi raţionali este: $ax + b = 0,\ a, b \in \mathbb{Q},\ a \neq 0$, în care *a* şi *b* se numesc *coeficienţi*, iar *x* se numeşte *necunoscută* sau *variabilă*. Se spune că *a* este *coeficientul necunoscutei*, iar *b* este *termenul liber*.

Această formă generală a unei ecuaţii cu coeficienţi raţionali de gradul I mai poartă numele de *ecuaţie de gradul I* cu necunoscuta *x*.

Soluţia unei ecuaţii cu coeficienţi raţionali este un număr $x_0 \in \mathbb{Q}$ pentru care propoziţia $ax_0 + b = 0,\ a, b \in \mathbb{Q},\ a \neq 0$ este adevărată.

Rezolvarea unei ecuaţii presupune determinarea tuturor soluţiilor sale. Dacă ecuaţia nu are nicio soluţie, atunci vom scrie mulţimea vidă.

Ecuaţiile echivalente sunt acele ecuaţii cu aceeaşi mulţime de soluţii.

Exemple:

- $2 \cdot (x+3) = 3 \cdot (5-x) \Rightarrow 2x + 6 = 15 - 3x \Rightarrow 5x = 9 \Rightarrow x = \frac{9}{5}$;
- $x \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5}\right) = 4 - \frac{1}{2} - \frac{2}{3} - \frac{3}{4} - \frac{4}{5} \Rightarrow$

$$\Rightarrow x\cdot\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\right)=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(1-\frac{2}{3}\right)+\left(1-\frac{3}{4}\right)+\left(1-\frac{4}{5}\right)$$

$$\Rightarrow x\cdot\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\right)=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\Rightarrow x=1$$

Probleme care se rezolvă cu ajutorul ecuaţiilor

Etapele de rezolvare a problemelor cu ajutorul ecuaţiilor sunt:

1. stabilirea necunoscutei principale;
2. exprimarea celorlalte necunoscute din problemă, dacă există, în funcţie de necunoscuta principală;
3. formarea ecuaţiei;
4. rezolvarea ecuaţiei;
5. interpretarea soluţiei ecuaţiei;
6. aflarea celorlalte necunoscute;
7. verificarea soluţiei;
8. redactarea răspunsului.

Exemplu: Un călător parcurge $\frac{1}{3}$ din drumul său şi încă 15 km. Care este lungimea întregului drum, dacă i-au mai rămas de parcurs 17 km?

1. notăm cu *x* lungimea totală a drumului;
2. -
3. $\frac{1}{3}\cdot x+15+17=x$
4. $\frac{1}{3}\cdot x+32=x\Rightarrow x+96=3x\Rightarrow 96=2x$
5. $x=48\text{km}$
6. -
7. $\frac{1}{3}\cdot 48+32=48\Rightarrow 16+32=48\Rightarrow 48=48$
8. lungimea întregului drum este de 48 km.

A.I.6. EXERCIŢII ŞI PROBLEME

1. Calculaţi: $\frac{1}{35}+\frac{2}{35}+\frac{3}{35}+...+\frac{34}{35}$.

Rezolvare: $\frac{1}{35}+\frac{2}{35}+\frac{3}{35}+...+\frac{34}{35}=\frac{1}{35}\cdot(1+2+3+...+34)=\frac{1}{35}\cdot\frac{34\cdot 35}{2}=17$.

2. Calculaţi suma: $S=\frac{13}{14}+\frac{1313}{1414}+\frac{131313}{141414}$.

Rezolvare:.

$$S=\frac{13}{14}+\frac{1313}{1414}+\frac{131313}{141414}=\frac{13}{14}+\frac{13\cdot 101}{14\cdot 101}+\frac{13\cdot 10101}{14\cdot 10101}=\frac{13}{14}+\frac{13}{14}+\frac{13}{14}=3\cdot\frac{13}{14}=\frac{39}{14}.$$

3. Aflaţi un număr, ştiind că adunând o cincime din el cu $\frac{3}{8}$ din el, obţinem 161.

Rezolvare: $\frac{x}{5}+\frac{3}{8}\cdot x=161\Rightarrow\frac{8x+15x}{40}=161\Rightarrow 23x=6440\Rightarrow x=280$.

4. Calculaţi inversul numărului: $a=\left(-\frac{5}{7}\right)^4\cdot\left(-\frac{5}{7}\right)^5:\left(-\frac{5}{7}\right)^{2^3}\cdot(-1)^{n\cdot(n+1)}$, $n\in N$.

***Rezolvare:*.**

$(-1)^{n\cdot(n+1)}=(-1)^{2k}=1$ (produsul a două numere consecutive este un număr par = 2k)

$a=\left(-\frac{5}{7}\right)^9:\left(-\frac{5}{7}\right)^8=\left(-\frac{5}{7}\right)^{9-8}=-\frac{5}{7}\Rightarrow a^{-1}=\left(-\frac{5}{7}\right)^{-1}=-\frac{7}{5}$.

5. Rezolvaţi în Q ecuaţia: $\left|x-\frac{3}{4}\right|+\frac{2}{3}=3$.

***Rezolvare:*.** $\left|x-\frac{3}{4}\right|=3-\frac{2}{3}\Rightarrow\left|x-\frac{3}{4}\right|=\frac{7}{3}\Rightarrow x-\frac{3}{4}=\pm\frac{7}{3}\Rightarrow x\in\left\{-\frac{19}{12};\frac{37}{12}\right\}$

6. Numărul 13 este media ponderată a numerelor $\frac{5}{3};\frac{7}{2}$ şi x care au ponderile 6; 4 şi 2. Determinaţi x.

***Rezolvare:*.** $13=\dfrac{\frac{5}{3}\cdot6+\frac{7}{2}\cdot4+x\cdot2}{6+4+2}\Rightarrow13=\dfrac{10+14+2x}{12}\Rightarrow13=\dfrac{12+x}{6}\Rightarrow78=12+x\Rightarrow x=66$.

7. Determinaţi $n\in N$ pentru care are loc dubla inegalitate: $\frac{1}{9}<\frac{(n+1)^2}{27}<\frac{2}{3}$.

***Rezolvare:*.**

$\frac{1}{9}<\frac{(n+1)^2}{27}<\frac{2}{3}\Rightarrow\frac{3}{27}<\frac{(n+1)^2}{27}<\frac{18}{27}\Rightarrow3<(n+1)^2<18\Rightarrow(n+1)^2\in\{4;5;6;7;...;17\},\ n\in N\Rightarrow$

$\Rightarrow n\in\{1;2;3\}$

8. Fie $n\in N^*$. Să se arate că $A=B$, unde: $A=\dfrac{3}{2^n+2^{n+1}}$, $B=\dfrac{7}{2^n+2^{n+1}+2^{n+2}}$.

***Rezolvare:*.**

$A=\dfrac{3}{2^n+2^{n+1}}=\dfrac{3}{2^n\cdot(1+2)}=\dfrac{3}{2^n\cdot3}=\dfrac{1}{2^n}$;

$B=\dfrac{7}{2^n\cdot(1+2+4)}=\dfrac{7}{2^n\cdot7}=\dfrac{1}{2^n}$

Rezultă: $A=B$

9. Determinaţi $n\in N, n\geq2$ pentru care expresia

$\left(1+\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{3}\right)\cdot...\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)-\left(1-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{3}\right)\cdot...\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)$ este număr natural.

***Rezolvare:*.**

$\left(1+\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{3}\right)\cdot...\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)-\left(1-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{3}\right)\cdot...\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)=\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot...\cdot\frac{n+1}{n}-\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot...\cdot\frac{n-1}{n}=$

$=\dfrac{n+1}{2}-\dfrac{1}{n}=\dfrac{n^2+n-2}{2n}\in N\Rightarrow$

că şi $2\cdot\dfrac{n^2+n-2}{2n}\in N$, adică $\dfrac{2n^2+2n-4}{2n}=n+1-\dfrac{4}{2n}\in N$, pentru $2n|4\Rightarrow n=2$.

10. a) Arătaţi că $\frac{1}{1\cdot 5}=\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{5}\right)$;

b) Comparaţi numerele x şi y:

$x=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2^3}+\frac{4}{3}-1+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2^2}$

$y=\frac{1}{1\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 9}+\frac{1}{9\cdot 13}+...+\frac{1}{97\cdot 101}$

Rezolvare:

a) $\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{5}\right)=\frac{1}{4}\cdot\frac{4}{5}=\frac{1}{5}$

b) $x=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2^3}+\frac{4}{3}-1+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2^2}=\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2^3}=\frac{3+2^4+6}{3\cdot 2^4}=\frac{25}{48}$

$y=\frac{1}{1\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 9}+\frac{1}{9\cdot 13}+...+\frac{1}{97\cdot 101}=\frac{1}{1\cdot(1+4)}+\frac{1}{5\cdot(5+4)}+...+\frac{1}{97\cdot(97+4)}=$

$=\frac{4}{4}\cdot\left[\frac{1}{1\cdot(1+4)}+\frac{1}{5\cdot(5+4)}+...+\frac{1}{97\cdot(97+4)}\right]=\frac{1}{4}\cdot\left[\frac{4}{1\cdot(1+4)}+\frac{4}{5\cdot(5+4)}+...+\frac{4}{97\cdot(97+4)}\right]=$

$=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{5}+\frac{1}{5}-\frac{1}{9}+...+\frac{1}{97}-\frac{1}{101}\right)=\frac{1}{4}\cdot\left(1-\frac{1}{101}\right)=\frac{1}{4}\cdot\frac{100}{101}=\frac{25}{101}$

Rezultă: $y < x$

11. a) Demonstraţi egalitatea: $\frac{2k+1}{k^2\cdot(k+1)^2}=\frac{1}{k^2}-\frac{1}{(k+1)^2}$, $k\in N^*$

b) Găsiţi cea de-a 2003-a zecimală a numărului $11\cdot A$, unde

$A=\frac{3}{1\cdot 4}+\frac{5}{4\cdot 9}+\frac{7}{9\cdot 16}+...+\frac{43}{441\cdot 484}$

Rezolvare:

a) $\frac{1}{k^2}-\frac{1}{(k+1)^2}=\frac{(k+1)^2-k^2}{(k+1)^2\cdot k^2}=\frac{(k+1-k)\cdot(k+1+k)}{(k+1)^2\cdot k^2}=\frac{2k+1}{k^2\cdot(k+1)^2}$

b) $A=\frac{3}{1\cdot 4}+\frac{5}{4\cdot 9}+\frac{7}{9\cdot 16}+...+\frac{43}{441\cdot 484}=\frac{1}{1}-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{9}+...+\frac{1}{441}-\frac{1}{484}=1-\frac{1}{484}=\frac{483}{484}$

$11\cdot A=11\cdot\frac{483}{484}=\frac{483}{44}=10{,}97(72)$

2003 – 2 = 2001

2001 : 2 = 1000, r =1, a 2003-a zecimală e 7.

12. Determinaţi numărul natural $n\geq 2$ pentru care media aritmetică a numerelor $a=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n}$ şi $b=\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+...+\frac{n-1}{n}$ este egală cu 1003,5.

Rezolvare:

$\frac{a+b}{2}=\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n}+\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+...+\frac{n-1}{n}}{2}=\frac{1+1+...+1}{2}=\frac{n-1}{2}=1003{,}5\Rightarrow n-1=2007\Rightarrow$

$\Rightarrow n=2008$

13. Calculaţi: $\left[2002-\left(\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+...+\frac{2002}{2003}\right)\right]:\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{2003}\right)$.

***Rezolvare:*.**

$$\left[2002-\left(\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+...+\frac{2002}{2003}\right)\right]:\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{2003}\right)=$$

$$=\left[\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(1-\frac{2}{3}\right)+...+\left(1-\frac{2002}{2003}\right)\right]:\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{2003}\right)=$$

$$=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{2003}\right):\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{2003}\right)=1$$

14. Demonstraţi egalitatea: $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+...+\frac{1}{99}-\frac{1}{100}=\frac{1}{51}+\frac{1}{52}+...+\frac{1}{100}$.

***Rezolvare:*.**

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+...+\frac{1}{100}-2\cdot\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+...+\frac{1}{100}\right)=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+...+\frac{1}{100}-2\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{50}\right)=$$

$$=\frac{1}{51}+\frac{1}{52}+...+\frac{1}{100}$$

15. Rezolvaţi ecuaţiile în Q:

a) $x\cdot\left(1-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{3}\right)\cdot...\cdot\left(1-\frac{1}{100}\right)=14{,}52$;

b) $x\cdot\left(-\frac{1}{1\cdot 2}-\frac{1}{2\cdot 3}-...-\frac{1}{199\cdot 200}\right)=-\frac{199}{200}$

***Rezolvare:*.**

a) $x\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot...\cdot\frac{99}{100}=14{,}52\Rightarrow x\cdot\frac{1}{100}=14{,}52\Rightarrow x=1452$

b) $-x\cdot\left(\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+...+\frac{1}{199\cdot 200}\right)=-\frac{199}{200}\Rightarrow x\cdot\left(\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+...+\frac{1}{199\cdot 200}\right)=\frac{199}{200}\Rightarrow$

$$x\cdot\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}...+\frac{1}{199}-\frac{1}{200}\right)=\frac{199}{200}\Rightarrow x\cdot\left(1-\frac{1}{200}\right)=\frac{199}{200}\Rightarrow x\cdot\frac{199}{200}=\frac{199}{200}\Rightarrow x=1.$$

16. Să se rezolve ecuaţia: $|x-1|+|x-2|+|x-3|=0$.

Rezolvare: Ştim că

$$\begin{cases}|x-1|\ge 0\\|x-2|\ge 0\\|x-3|\ge 0\end{cases}\Rightarrow |x-1|+|x-2|+|x-3|\ge 0.$$

Rezultă că pentru a avea egalitate fiecare modul trebuie să fie egal cu zero, ceea ce implică:

$$\begin{cases}|x-1|=0\\|x-2|=0\\|x-3|=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=1\\x=2\\x=3\end{cases}\Rightarrow \text{imposibil}\Rightarrow S=\varnothing,\ \text{ecuaţia nu are soluţii.}$$

17. Rezolvaţi ecuaţia: $1+\frac{1}{1+2}+\frac{1}{1+2+3}+...+\frac{1}{1+2+3+...+x}=\frac{200}{101},\ x\in N^{*}$.

Rezolvare: $1+\frac{1}{\frac{2\cdot 3}{2}}+\frac{1}{\frac{3\cdot 4}{2}}+...+\frac{1}{\frac{x\cdot(x+1)}{2}}=\frac{200}{101}\Rightarrow 2\cdot\left(\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+...+\frac{1}{x\cdot(x+1)}\right)=\frac{200}{101}-1$

$\Rightarrow 2\cdot\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+...+\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}\right)=\frac{99}{101}\Rightarrow 2\cdot\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{x+1}\right)=\frac{99}{101}\Rightarrow 2\cdot\frac{x-1}{2\cdot(x+1)}=\frac{99}{101}\Rightarrow$

$\Rightarrow 101\cdot(x-1)=99\cdot(x+1)\Rightarrow 101x-101=99x+99\Rightarrow 2x=200\Rightarrow x=100$

18. Determinaţi numerele raţionale strict pozitive a,b,c,d care verifică egalităţile:

a) a+b+c+d=4

b) $a^4+b^4+c^4+d^4+\frac{a^4b^4c^4+a^4b^4d^4+a^4c^4d^4+b^4c^4d^4}{a^4b^4c^4d^4}=8$

Rezolvare: egalitatea b) se poate scrie:

$a^4+\frac{1}{a^4}+b^4+\frac{1}{b^4}+c^4+\frac{1}{c^4}+d^4+\frac{1}{d^4}=8$

Se ştie că $x+\frac{1}{x}\geq 2,\ \forall x>0$

Deoarece avem egalitate, rezultă că

$a^4+\frac{1}{a^4}=2\Rightarrow a=1$, $b^4+\frac{1}{b^4}=2\Rightarrow b=1$,

$c^4+\frac{1}{c^4}=2\Rightarrow c=1$, $d^4+\frac{1}{d^4}=2\Rightarrow d=1$,

numerele găsite verifică egalitatea a).

19. Determinaţi cifra x pentru care numărul $a=\frac{1}{x}+\frac{1}{\overline{0,(x)}}+\frac{2}{\overline{0,0(x)}}+\frac{1}{\overline{0,xx}}-\frac{12}{\overline{xx}}$ este număr natural.

Rezolvare:

$a=\frac{1}{x}+\frac{1}{\overline{0,(x)}}+\frac{2}{\overline{0,0(x)}}+\frac{1}{\overline{0,xx}}-\frac{12}{\overline{xx}}=\frac{1}{x}+\frac{9}{x}+\frac{180}{x}+\frac{100}{11x}-\frac{12}{11x}=\frac{190}{x}-\frac{88}{11x}=\frac{190}{x}-\frac{8}{x}=\frac{182}{x}$

x poate lua valorile: 1; 2

20. Arătaţi că mulţimea $A=\left\{\frac{2008}{5},\frac{2009}{6},\frac{2010}{7},...\right\}$ conţine un singur număr natural.

Rezolvare:

$A=\left\{\frac{2008}{5},\frac{2008+1}{5+1},\frac{2008+2}{5+2},...,\frac{2008+n}{5+n}\right\}$

$\frac{2008+n}{5+n}=\frac{2003+5+n}{5+n}=1+\frac{2003}{5+n}$

$n+5|2003$, 2003 e nr prim $\Rightarrow n+5=2003\Rightarrow n=1998$, deci singurul număr natural este:

$\frac{1998+2008}{1998+5}=2$

B.I. NUMERE REALE

B.I.1. RĂDĂCINA PĂTRATĂ A UNUI NUMĂR NATURAL PĂTRAT PERFECT

Definiţie: Un număr natural *a* se numeşte ***pătrat perfect***, dacă există un număr natural *n*, astfel încât $n^2 = a$.

Definiţie: Numărul natural *n* cu proprietatea $n^2 = a$, cu *a* număr natural pătrat perfect, se numeşte rădăcină pătrată a numărului *a* şi se notează $n = \sqrt{a}$.

Exemple:

$n^2 = a$	0	4	9	16	25	100	121	144	400
$n = \sqrt{a}$	0	2	3	4	5	10	11	12	20

Observaţie: Dacă $n \in N^*$, pătrat perfect, atunci există două numere distincte al căror pătrat este *n*, şi anume $\sqrt{n}$ şi $-\sqrt{n}$; unul dintre acestea este un număr natural. De aceea, dacă $a \in Z$, atunci $\sqrt{a^2} = |a|$.

Exemple:

$\sqrt{a^2}$	$\sqrt{(-7)^2}$	$\sqrt{9a^4b^2}$	$\sqrt{2^{12} \cdot 5^{20} \cdot 11^{40}}$	$\sqrt{2^2 \cdot 5 + 2^2 \cdot 11}$
$\|a\|$	$\|-7\| = 7$	$\|3a^2b\| = 3a^2\|b\|$	$2^6 \cdot 5^{10} \cdot 11^{20}$	8

B.I.2. RĂDĂCINA PĂTRATĂ A UNUI NUMĂR RAŢIONAL POZITIV

Rădăcina pătrată a numărului raţional pozitiv *a* este numărul raţional *x* cu proprietatea $x^2 = a$. Se notează $x = \sqrt{a}$ şi se citeşte *radical din a*.

Proprietăţi:

- $\sqrt{a} \geq 0, \ \forall a \in Q_+$;
- $\left(\sqrt{a}\right)^2 = a, \ \forall a \in Q_+$;
- $\sqrt{a^2} = |a|, \ \forall a \in Q$.

Exemple:

- $\sqrt{\frac{25}{36}} = \sqrt{\left(\frac{5}{6}\right)^2} = \frac{5}{6}$;
- $\sqrt{\left(-\frac{4}{9}\right)^2} = \left|-\frac{4}{9}\right| = \frac{4}{9}$;
- $\left(13 \cdot \sqrt{144} - 5 \cdot \sqrt{196}\right) \cdot \left(\sqrt{\sqrt{361} - \sqrt{225}}\right) = (13 \cdot 12 - 5 \cdot 14) \cdot \left(\sqrt{19 - 15}\right) = (156 - 70) \cdot 2 = 172$;
- $x^2 + 4 = 68 \Rightarrow x^2 = 64 \Rightarrow x = \pm 8$;
- $a = (1 + 2 + ... + 50) - 25 \cdot 2 = \frac{50 \cdot 51}{2} - 25 \cdot 2 = 25 \cdot 51 - 25 \cdot 2 = 25 \cdot 49 = 5^2 \cdot 7^2 = 35^2$ rezultă că a este pătrat perfect.

B.I.3. CALCULUL RĂDĂCINII PĂTRATE

Algoritmul extragerii rădăcinii pătrate dintr-un număr natural pătrat perfect

Exemplu:

Nr. etapă	***Numărul calcularea rădăcinii pătrate***	***Etape***
1.	$\sqrt{10\ 24}$	Se desparte numărul în grupe de câte două cifre de la dreapta spre stânga.
2.	$\sqrt{10\ 24}$ 3 9 = 1	Se caută cel mai mare număr al cărui pătrat este mai mic sau egal cu 10. Acesta este 3 şi se scrie în dreapta sus. Pătratul numărului se aşează sub 10; se efectuează scăderea şi se obţine primul rest parţial: 1
3.	$\sqrt{10\ 24}$ 3 9 6 = 1 24	Se coboară lângă primul rest parţial grupa următoare. Obţinem 124. Dublăm cifra 3 a rădăcinii pătrate, obţinem numărul 6, care se aşează sub 3.
4.	$\sqrt{10\ 24}$ 32 9 62 ·2=124 = 1 24 1 24 = = =	Se ignoră ultima cifră a numărului 124 şi se obţine numărul 12. Împărţim 12 la 6 şi obţinem câtul 2. Aşezăm cifra 2 la dreapta numărului 6 şi obţinem 62. Înmulţim 62 cu 2 şi obţinem 124. Scădem 124 din124 şi obţinem restul 0. Trecem cifra 2 la rădăcina pătrată, iar algoritmul se încheie. $\sqrt{1024} = 32$

Algoritmul extragerii rădăcinii pătrate
dintr-un număr raţional scris sub formă de fracţie zecimală

Exemplu:

Nr. etapă	***Numărul calcularea rădăcinii pătrate***	***Etape***
1.	$\sqrt{12\,11,\,04}$	Se desparte numărul în grupe de câte două cifre de la vigulă spre dreapta şi spre stânga.
2.	$\sqrt{12\,11,\,04}$ 34 9 65·5=325 nu convine = 311 64·4=256 256 = 55	Se procedează ca şi în cazul numerelor naturale până ajungem la virgulă. Dar, trebuie observat că 31: 6 dă câtul 5, iar 65·5=325 > 311. Încercăm cu cifra 4, iar aceasta convine.
3.	$\sqrt{12\,11,\,04}$ 34, 9 65·5=325 nu = 311 64·4=256 256 68 = 55 04	Se pune virgula la rădăcina pătrată şi se coboară lângă restul parţial grupa de după virgulă. Îl dublăm pe 34, obţinând 68, făcând abstracţie de virgulă.
4.	$\sqrt{12\,11,\,04}$ 34,8 9 65·5=325 nu = 3 11 64·4=256 2 56 688·8=5504 = 55 04 55 04 = = = =	Se continuă ca şi la numerele naturale. Trecem cifra 8 la rădăcina pătrată, la dreapta virgulei, restul parţial este 0, iar algoritmul se încheie. $\sqrt{1211{,}04} = 34{,}8$

B.I.4. MULŢIMEA NUMERELOR REALE. MODULUL UNUI NUMĂR REAL. COMPARAREA NUMERELOR REALE. REPREZENTAREA PE AXĂ.

Mulţimea numerelor reale este: $Q \cup (R \setminus Q) = R$.

Avem: $N \subset Z \subset Q \subset R$, incluziune figurată pe ultima pagină a acestei părţi a cărţii.

Reamintim:

- mulţimea numerelor naturale: $N = \{0,1,2,3,...\}$;
- mulţimea numerelor întregi: $Z = \{...,-3,-2,-1,0,1,2,3,...\}$;
- mulţimea numerelor raţionale: $Q = \left\{ x \,\middle|\, \exists a,b \in Z, b \neq 0, \text{ astfel încât } x = \frac{a}{b} \right\}$;
- mulţimea numerelor iraţionale: $I = R \setminus Q$ (***exemple***: $\sqrt{2}$, $-3\sqrt{5}+2$). Numerele iraţionale au o infinitate de cifre zecimale care nu se repetă periodic.

Aspectele privind modulul, compararea şi partea întreagă a numerelor reale sunt asemănătoare cu cele precizate în detaliu în cadrul paragrafului A.I.3, referitor la numere raţionale, cu precizarea că se face extensie la mulţimea numerelor reale.

Modulul sau ***valoarea absolută*** a unui număr real *x*, notat $|x|$, este definit astfel:

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{dacă } x > 0 \\ 0, & \text{dacă } x = 0 \\ -x, & \text{dacă } x < 0 \end{cases}.$$

Compararea numerelor reale.

Pentru $a,b \in R$, *a* situat la stânga lui *b* pe axa numerelor, avem că a < b sau b > a.

Dacă a<b sau a=b, avem că $a \leq b$, iar dacă a>b sau a=b, avem $a \geq b$.

Exemple: Fie mulţimea $A = \left\{ -\sqrt{16}; -\frac{1}{2}; \frac{75}{3}; 0,1; \frac{\sqrt{36}}{2}; -5; 2,1(4); \sqrt{3^6}; \sqrt{26} \right\}$.

- $A \cap N = \left\{ \frac{75}{3}; \frac{\sqrt{36}}{2}; \sqrt{3^6} \right\} = \{25; 9; 27\}$;
- $A \cap (R \setminus Q) = \{\sqrt{26}\}$;
- $A \setminus Z = \left\{ -\frac{1}{2}; 0,1; 2,1(4); \sqrt{26} \right\}$.

Partea întreagă a unui număr real x, notată cu [x], este cel mai mare număr întreg mai mic sau egal cu x.

Exemple: [3,72] = 3;   [-3,72] = - 4.

Partea fracţionară a lui x este dată de diferenţa: $\{x\} = x - [x]$.

Exemple: $\{3,72\} = 3,72 - 3 = 0,72$; $\{-3,72\} = -3,72 - (-4) = 0,28$.

B.I.5. REGULI DE CALCUL CU RADICALI

1. $\sqrt{a^2} = |a|, \forall a \in R$;

Exemple:

- $\sqrt{(-6)^2} = |-6| = 6$;
- $|-5| + \sqrt{(-7)^2} = 5 + |-7| = 5 + 7 = 12$;
- $\sqrt{(x-1)^2} = |x-1|$.

2. $\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}, \forall a \ge 0, b \ge 0$, prin urmare: $\left(\sqrt{a}\right)^n = \sqrt{a^n}, \forall n \in N$;

Exemple:

- $\sqrt{8} \cdot \sqrt{10} = \sqrt{80}$;
- $-\sqrt{5} \cdot \left(-\sqrt{4\frac{5}{5}}\right) = \sqrt{5} \cdot \sqrt{\frac{25}{5}} = \sqrt{5} \cdot \frac{5}{\sqrt{5}} = 5$;
- $\left(\sqrt{2}\right)^5 = \sqrt{2^5} = \sqrt{32}$.

3. $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}, \forall a \ge 0, b > 0$, prin urmare: $\left(\sqrt{\frac{a}{b}}\right)^n = \frac{\left(\sqrt{a}\right)^n}{\left(\sqrt{b}\right)^n}, \forall n \in N$;

Exemple:

- $\sqrt{5,(5)} = \sqrt{5\frac{5}{9}} = \sqrt{\frac{50}{9}} = \frac{\sqrt{50}}{\sqrt{9}}$;
- $\frac{\sqrt{63} + \sqrt{28}}{\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{63}}{\sqrt{7}} + \frac{\sqrt{28}}{\sqrt{7}} = \sqrt{\frac{63}{7}} + \sqrt{\frac{28}{7}} = \sqrt{9} + \sqrt{4} = 5$;
- $\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^3 = \frac{\left(\sqrt{2}\right)^3}{(3)^3} = \frac{\sqrt{2^3}}{\sqrt{3^3}}$.

4. Introducerea factorilor sub radical: $a\sqrt{b} = \begin{cases} \sqrt{a^2 \cdot b}, & a \ge 0, b \ge 0 \\ -\sqrt{a^2 \cdot b}, & a < 0, b \ge 0 \end{cases}$;

Exemple:

- $4\sqrt{11} = \sqrt{4^2 \cdot 11}$;
- $-9\sqrt{5} = -\sqrt{9^2 \cdot 5}$;
- $6\sqrt{26} > \sqrt{321}$, deoarece $\sqrt{936} > \sqrt{321}$.

5. Scoaterea factorilor de sub radical: $\sqrt{a^2 \cdot b} = |a| \cdot \sqrt{b}, \forall a \in R, b \ge 0$.

Exemple:

- $\sqrt{160} = \sqrt{4^2 \cdot 10} = 4\sqrt{10}$;
- $\sqrt{2 \cdot 5^2 + 2\sqrt{121}} = \sqrt{2 \cdot 5^2 + 2 \cdot 11} = \sqrt{2 \cdot (25 + 11)} = \sqrt{2 \cdot 36} = \sqrt{2 \cdot 6^2} = 6\sqrt{2}$;
- $-3\sqrt{12} < -6\sqrt{2}$, deoarece $-3\sqrt{12} = -3\sqrt{2^2 \cdot 3} = -6\sqrt{3}$.

B.I.6. OPERAŢII CU NUMERE REALE

Adunarea şi scăderea numerelor reale

Adunarea numerelor reale este operaţia prin care oricărei perechi de numere reale **a** şi **b** i se asociază un număr real, notat **a+b**, numit *suma numerelor* **a** şi **b**.

Proprietăţile adunării numerelor reale:

- asociativitatea: $\forall a,b,c \in R,\ (a+b)+c = a+(b+c)$;
- elementul neutru la adunare este 0: $\forall a \in R, \exists\, 0 \in R$, a.î. $a+0=0+a=a$;
- opusul numărului a este -a: $\forall a \in R,\ \exists -a \in R$, a.î. $a+(-a)=(-a)+a=0$;
- comutativitatea: $\forall a,b \in R,\ a+b=b+a$.

Scăderea numerelor reale este operaţia prin care oricărei perechi de numere reale **a** şi **b** i se asociază un număr real, notat **a-b = a + (-b)**, numit *diferenţa numerelor* **a** şi **b**.

Exemple:

- $3\sqrt{11}+\left(-2\sqrt{11}+9\sqrt{11}\right)-10\sqrt{11}=3\sqrt{11}+7\sqrt{11}-10\sqrt{11}=10\sqrt{11}-10\sqrt{11}=0$**;**
- $4\sqrt{x^4}+9\sqrt{16x^2}-10\sqrt{4x^2}=4x^2+9\sqrt{(4x)^2}-10\sqrt{(2x)^2}=4x^2+36\cdot|x|-20\cdot|x|=$
  $=4x^2+16\cdot|x|=\begin{cases}4x^2+16x, \text{ pentru } x \ge 0\\ 4x^2-16x, \text{ pentru } x<0\end{cases}$.

Înmulţirea şi împărţirea numerelor reale

Înmulţirea numerelor reale este operaţia prin care oricărei perechi de numere reale **a** şi **b** i se asociază un număr real, notat **a·b**, numit *produsul numerelor* **a** şi **b**.

Proprietăţile înmulţirii numerelor reale:

- asociativitatea: $\forall a,b,c \in R,\ (a\cdot b)\cdot c = a\cdot(b\cdot c)$;
- elementul neutru la înmulţire este 1: $\forall a \in R, \exists\, 1 \in R$, a.î. $a\cdot 1=1\cdot a=a$;
- $\forall a \in R^*$ are un invers: $a^{-1}=\dfrac{1}{a}$, cu proprietatea că: $a\cdot\dfrac{1}{a}=\dfrac{1}{a}\cdot a=1$;
- comutativitatea: $\forall a,b \in R,\ a\cdot b=b\cdot a$;
- distributivitatea înmulţirii faţă de adunarea şi scăderea numerelor reale:
  $\forall a,b,c \in R,\ a\cdot(b\pm c)=a\cdot b\pm a\cdot c$.

Împărţirea numerelor reale este operaţia prin care oricărei perechi de numere reale **a** şi **b** $\neq 0$ i se asociază un număr real, notat **a:b =** $\dfrac{a}{b}=a\cdot b^{-1}$, numit *câtul numerelor* **a** şi **b**.

Exemple:

- $\sqrt{5}\cdot\left(3+\sqrt{15}\right)-\left(\sqrt{75}-\sqrt{20}\right)=3\sqrt{5}+\sqrt{75}-\left(\sqrt{75}-2\sqrt{5}\right)=3\sqrt{5}+\sqrt{75}-\sqrt{75}+2\sqrt{5}=5\sqrt{5}$;
- $\dfrac{10\sqrt{12}}{5\sqrt{2}}=\dfrac{10\sqrt{2^2\cdot 3}}{5\sqrt{2}}=\dfrac{20\sqrt{3}}{5\sqrt{2}}=4\sqrt{\dfrac{3}{2}}$.

Ridicarea la putere cu exponent întreg a unui număr real

Dacă $q \in R$, $n \in N^*$, atunci $q^n = \underbrace{q \cdot q \cdot ... \cdot q}_{\text{n factori}}$, iar *q* este *baza*, iar *n* este *exponentul* puterii.

Fie $q \in R^*$, $n \in N^*$. Prin definiţie, $q^{-n} = \dfrac{1}{q^n}$, iar $q^0 = 1$.

Reguli de calcul cu puteri

- $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$, $\forall a \in R^*, \forall m, n \in Z$;
- $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$, $\forall a \in R^*, \forall m, n \in Z$;
- $a^m : a^n = a^{m-n}$, $\forall a \in R^*, \forall m, n \in Z$;
- $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n, \forall a, b \in R^*, \forall n \in Z$;
- $(a : b)^n = a^n : b^n, \forall a, b \in R^*, \forall n \in Z$;
- $\left(\sqrt{a}\right)^n = \sqrt{a^n}, \forall a > 0,\ \forall n \in Z$;
- $\left(\sqrt{\dfrac{a}{b}}\right)^n = \dfrac{\left(\sqrt{a}\right)^n}{\left(\sqrt{b}\right)^n}, \forall a, b > 0,\ \forall n \in Z$;
- $\left(a\sqrt{b}\right)^n = a^n\sqrt{b^n},\ \forall a \in R^*, b > 0,\ \forall n \in Z$.

Exemple:

- $\left(\sqrt{2}\right)^3 \cdot \left(\sqrt{2}\right)^5 = \left(\sqrt{2}\right)^8 = 2^4 = 16$;
- $\left(\dfrac{2}{\sqrt{5}}\right)^3 : \left(\dfrac{4}{\sqrt{5}}\right)^3 = \dfrac{2^3}{\left(\sqrt{5}\right)^3} : \dfrac{2^6}{\left(\sqrt{5}\right)^3} = \dfrac{2^3}{\left(\sqrt{5}\right)^3} \cdot \dfrac{\left(\sqrt{5}\right)^3}{2^6} = \dfrac{1}{2^3} = \dfrac{1}{8}$;
- $\left[\left(\sqrt{\dfrac{9}{8}} \cdot \sqrt{2}\right)^2\right]^{-3} = \left[\left(\dfrac{3}{2\sqrt{2}} \cdot \sqrt{2}\right)^2\right]^{-3} = \left(\dfrac{3}{2}\right)^{-6} = \left(\dfrac{2}{3}\right)^6 = \dfrac{64}{729}$.

Ordinea efectuării operaţiilor cu numere reale

Ordinea efectuării operaţiilor cu numere reale este aceeaşi ca şi ordinea efectuării operaţiilor cu numere raţionale, adică:

- ridicările la putere şi extragerea rădăcinii pătrate,
- înmulţirile şi împărţirile,
- adunările şi scăderile,

păstrate în ordinea scrierii, ţinându-se cont, acolo unde este cazul, de paranteze, adică se efectuează prima dată calculele din parantezele rotunde, apoi din parantezele drepte, apoi din acolade.

Exemple:

- $\left(50\sqrt{192} - 20\sqrt{675}\right) : 2\sqrt{5^4} = \left(50\sqrt{8^2 \cdot 3} - 20\sqrt{15^2 \cdot 3}\right) : 2 \cdot 5^2 = \left(400\sqrt{\cdot 3} - 300\sqrt{3}\right) : 50 =$
  $= 100\sqrt{3} : 50 = 2\sqrt{3}$;
- $2\sqrt{3} - 7 \cdot \left\{8\sqrt{2} - 4 \cdot \left[5\sqrt{3} + 3 \cdot \left(4\sqrt{2} - 3\sqrt{3}\right)\right] : 8\right\} = 2\sqrt{3} - 7 \cdot \left[8\sqrt{2} - 4 \cdot \left(5\sqrt{3} + 12\sqrt{2} - 9\sqrt{3}\right) : 8\right] =$
  $= 2\sqrt{3} - 7 \cdot \left[8\sqrt{2} - 8 \cdot \left(6\sqrt{2} - 2\sqrt{3}\right) : 8\right] = 2\sqrt{3} - 7 \cdot \left(8\sqrt{2} - 6\sqrt{2} + 2\sqrt{3}\right) = -14\sqrt{2} - 12\sqrt{3}$.

Raţionalizarea numitorilor

A raţionaliza o fracţie înseamnă a elimina radicalul de la numitor prin amplificare.

Exemple:

- $^{\sqrt{b})}\dfrac{1}{a\sqrt{b}} = \dfrac{\sqrt{b}}{a \cdot b}$, cu $a, b \in Q^*$, $b > 0$;
- $-\dfrac{11}{\sqrt{20}} = -^{\sqrt{5})}\dfrac{11}{2\sqrt{5}} = -\dfrac{11\sqrt{5}}{10}$

Reguli de calcul:

- $(a+\sqrt{b}) \cdot (a-\sqrt{b}) = a^2 - b$, $a, b, c, d \in R$, $b, d > 0$;
- $(a\sqrt{b}+c\sqrt{d}) \cdot (a\sqrt{b}-c\sqrt{d}) = (a\sqrt{b})^2 - (c\sqrt{d})^2 = a^2b - c^2d$, $a, b, c, d \in R$, $b, d > 0$

Raţionalizarea unui raport al cărui numitor conţine expresii cu radicali se face prin amplificarea cu conjugatul acelei expresii,ca de exemplu: conjugatul expresiei $3-\sqrt{2}$ este $3+\sqrt{2}$.

Exemple:

- $^{3+\sqrt{5})}\dfrac{2}{3-\sqrt{5}} = \dfrac{2\cdot(3+\sqrt{5})}{(3+\sqrt{5})\cdot(3-\sqrt{5})} = \dfrac{6+2\sqrt{5}}{3^2-5} = \dfrac{6+2\sqrt{5}}{4} = \dfrac{2\cdot(3+\sqrt{5})}{4} = \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$;
- $^{3\sqrt{2}+2\sqrt{3})}\dfrac{6}{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}} = \dfrac{6\cdot(3\sqrt{2}+2\sqrt{3})}{9\cdot 2 - 4\cdot 3} = \dfrac{6\cdot(3\sqrt{2}+2\sqrt{3})}{6} = 3\sqrt{2}+2\sqrt{3}$.

Media geometrică. Inegalitatea mediilor

Media geometrică sau proporţională a două numere pozitive este rădăcina pătrată a produsului lor:

$$m_g(a, b) = \sqrt{a \cdot b},\ a, b > 0.$$

Observaţii:

- Pentru $0 < a < b$, avem $a \le \sqrt{a \cdot b} \le b$;
- Media aritmetică a două numere este egală cu media geometrică, dacă şi numai dacă cele două numere sunt egale;
- Pentru $x, y \in R, a, b > 0$, are loc ***inegalitatea mediilor***:

$$m_h(a, b) \le m_g(a, b) \le m_a(a, b),$$

unde: $m_h(a, b) = \dfrac{2ab}{a+b}$ = media armonică,

$m_a(a, b) = \dfrac{a+b}{2}$ = media aritmetică.

Exemple:

- Media geometrică a numerelor $5-3\sqrt{2}$ şi $5+3\sqrt{2}$ este:
  $m_g = \sqrt{(5-3\sqrt{2})\cdot(5+3\sqrt{2})} = \sqrt{25-18} = \sqrt{7}$;
- Pentru numerele 6 şi 54 verificăm inegalitatea mediilor:

$m_h = \dfrac{2\cdot 6\cdot 54}{6+54} = \dfrac{12\cdot 54}{60} = 10{,}8$; $m_g = \sqrt{6\cdot 54} = \sqrt{6\cdot 3^2\cdot 6} = 18$; $m_a = \dfrac{6+54}{2} = 30$.

Din calcule, rezultă că inegalitatea mediilor este verificată.

B.I.7. EXERCIŢII ŞI PROBLEME

1. Calculaţi valoarea lui a şi apoi arătaţi că este pătrat perfect: $a=(2+4+6+...+2012)+1007$

Rezolvare:.

$$a=(2+4+6+...+2012)+1007=2\cdot(1+2+3+...+1006)+1007=2\cdot\frac{1006\cdot 1007}{2}+1007=$$

$$=1007\cdot(1006+1)=1007^2$$

2. Calculaţi valoarea lui a şi rădăcina pătrată a acestuia: $a=101^2-2\cdot 99\cdot 101+99^2$.

Rezolvare:.

$$a=101^2-2\cdot 99\cdot 101+99^2=101^2-99\cdot 101-99\cdot 101+99^2=101\cdot(101-99)-99\cdot(101-99)=$$

$$=(101-99)^2=2^2\Rightarrow\sqrt{a}=\sqrt{2^2}=2$$

3. Arătaţi că numărul $a=5^m+7$ nu este pătrat perfect, $\forall m\in N$.

Rezolvare:.

ultima cifră = $uc(5^m)=\{1;\ 5\}$

$$uc(a)=\begin{cases}8, \text{ pentru } m=0\\ 2, \text{ pentru } m\in N^*\end{cases}\Rightarrow$$

că numărul dat nu este pătrat perfect, deoarece se termină în cifrele 2 sau 8.

4. Scrieţi numărul 9 ca:

a) suma a două pătrate perfecte;
b) diferenţa dintre un pătrat perfect şi un cub perfect;
c) suma a trei pătrate perfecte;
d) suma dintre un pătrat perfect şi un cub perfect.

Rezolvare:.

a) $9=0^2+3^2$;

b) $9=6^2-3^3$;

c) $9=1^2+2^2+2^2$;

d) $9=1^2+2^3$.

5. Există numere de forma $\overline{aa}$ care să fie pătrate perfecte?

Rezolvare:.

Deoarece $\overline{aa}=10\cdot a+a=11\cdot a$, rezultă că nu există astfel de numere care să fie pătrate perfecte.

6. Calculaţi: $\sqrt{64^2-63^2+4^2+1^2}$.

Rezolvare:.

$$\sqrt{64^2-63^2+4^2+1^2}=\sqrt{(64-63)\cdot(64+63)+17}=\sqrt{127+17}=\sqrt{144}=\sqrt{12^2}=12.$$

7. Arătaţi că numărul $N=\sqrt{5^{2n+1}\cdot 9^{n+1}+25^n\cdot 3^{2n+2}\cdot 11}$ este natural, $\forall n\in N$.

Rezolvare:.

$$N=\sqrt{5^{2n+1}\cdot 9^{n+1}+25^n\cdot 3^{2n+2}\cdot 11}=\sqrt{5^{2n}\cdot 5\cdot 3^{2n}\cdot 3^2+5^{2n}\cdot 3^{2n}\cdot 3^2\cdot 11}=$$

$$=\sqrt{5^{2n}\cdot 3^{2n}\cdot 3^2\cdot(5+11)}=15^n\cdot 12\in N,\ \forall n\in N$$

8. Determinaţi numărul natural x care verifică egalitatea:

$$5^x = \sqrt{1+4+4\cdot5+4\cdot5^2+...+4\cdot5^{2011}}$$

***Rezolvare:*.**

$$5^x = \sqrt{5+4\cdot\left(5+5^2+...+5^{2011}\right)} \Rightarrow 5^x = \sqrt{5+4\cdot\frac{5^{2011}\cdot5-5}{5-1}} \Rightarrow 5^x = \sqrt{5+5^{2011}\cdot5-5} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 5^x = \sqrt{5^{2012}} \Rightarrow 5^x = \sqrt{\left(5^{1006}\right)^2} \Rightarrow 5^x = 5^{1006} \Rightarrow x = 1006$$

9. Determinaţi cifra x, astfel încât: $\sqrt{\frac{\overline{1x}}{3}} \in R \setminus Q$.

Rezolvare: $x \in \{0;1;3;4;5;6;7;8;9\}$.

10. Arătaţi că numărul $\sqrt{5}$ este iraţional.

Rezolvare:

Presupunem prin reducere la absurd că $\sqrt{5} \in Q \Rightarrow \sqrt{5} = \frac{a}{b},\ (a,b)=1$.

$$\sqrt{5} = \frac{a}{b}\ (\ )^2 \Rightarrow 5 = \frac{a^2}{b^2} \Rightarrow a^2 = 5\cdot b^2$$

Din $\left(5\cdot b^2\right)\vdots 5 \Rightarrow a^2 \vdots 5$

Fie $a = 5k,\ k \in N \Rightarrow 25k^2 = 5b^2 \Rightarrow b^2 = 5k^2$ şi cum $\left(5\cdot k^2\right)\vdots 5 \Rightarrow b^2 \vdots 5$, adică $b \vdots 5$, deci $b = 5p$.

Din $a = 5k$ şi $b = 5p \Rightarrow$ că 5 e divizor comun pentru a şi b, ceea ce contrazice ipoteza, $(a,b)=1$.

Prin urmare, presupunerea făcută este falsă $\Rightarrow \sqrt{5} \in I$.

11. Să se calculeze:

a) $\left|x+\sqrt{2}\right| + \left|x-\sqrt{2}\right|,\ x \in R,\ x \geq 2$;

b) $\sqrt{\left(3-\sqrt{5}\right)^2} + \sqrt{\left(1-\sqrt{5}\right)^2}$.

Rezolvare:

a) $\left|x+\sqrt{2}\right| + \left|x-\sqrt{2}\right| = x+\sqrt{2}+x-\sqrt{2} = 2x$

b) $\sqrt{\left(3-\sqrt{5}\right)^2} + \sqrt{\left(1-\sqrt{5}\right)^2} = \left|3-\sqrt{5}\right| + \left|1-\sqrt{5}\right| = 3-\sqrt{5}-1+\sqrt{5} = 2$

12. Calculaţi media geometrică a numerelor: $a = \sqrt{10\sqrt{5}-5\sqrt{11}}$ şi $b = \sqrt{10\sqrt{5}+5\sqrt{11}}$.

Rezolvare:

$$a = \sqrt{10\sqrt{5}-5\sqrt{11}} = \sqrt{\sqrt{500}-\sqrt{275}}$$

$$b = \sqrt{10\sqrt{5}+5\sqrt{11}} = \sqrt{\sqrt{500}+\sqrt{275}}$$

$$a\cdot b = \sqrt{(\sqrt{500}-\sqrt{275})\cdot(\sqrt{500}+\sqrt{275})} = \sqrt{500-275} = \sqrt{225} = 15 \Rightarrow m_g = \sqrt{a\cdot b} = \sqrt{15}$$

13. Fie mulţimea $A = \left\{-2; \sqrt{2007};\ 0;\ 13;\ \sqrt{8};\ 2{,}4;\ 1\frac{1}{3}; 3,(8); \sqrt{289}\right\}$. Aflaţi numărul de elemente al mulţimii: $A \cap (R \setminus Q)$.

Rezolvare:

$A \cap (R \setminus Q) = \left\{\sqrt{2007}; \sqrt{8}\right\} \Rightarrow \text{card}[A \cap (R \setminus Q)] = 2$.

14. Dacă $\sqrt{\left(x-3\sqrt{2}\right)^2}+\sqrt{\left(y-4\sqrt{2}\right)^2}\le 0$, calculaţi mediile aritmetică, geometrică şi armonică.

Rezolvare:

Din $\sqrt{\left(x-3\sqrt{2}\right)^2}+\sqrt{\left(y-4\sqrt{2}\right)^2}\le 0 \Rightarrow \left|x-3\sqrt{2}\right|+\left|y-4\sqrt{2}\right|\le 0$

şi din faptul că $|z|\ge 0,\ \forall z\in R \Rightarrow$ că inegalitatea are loc pentru:

$$\begin{cases}\left|x-3\sqrt{2}\right|=0\\ \left|y-4\sqrt{2}\right|=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=3\sqrt{2}\\ y=4\sqrt{2}\end{cases}.$$

$x\cdot y=3\sqrt{2}\cdot 4\sqrt{2}=24$

$x+y=3\sqrt{2}+4\sqrt{2}=7\sqrt{2}$

$$m_h=\frac{2\cdot 24}{7\sqrt{2}}=\frac{48}{7\sqrt{2}}=\frac{48\sqrt{2}}{14}=\frac{24\sqrt{2}}{7};\quad m_g=\sqrt{24}=2\sqrt{6}\,;\quad m_a=\frac{7\sqrt{2}}{2}.$$

15. Se consideră mulţimile: $A=\left\{\sqrt{0},\sqrt{1},\sqrt{2},...,\sqrt{200}\right\}$ şi $B=\left\{x\in A \mid 5\le x<7\right\}$.

a) Aflaţi numărul de elemente ale mulţimii B.

b) Determinaţi numărul de elemente raţionale ale mulţimii A.

Rezolvare:

a) $B=\left\{\sqrt{25},\sqrt{26},\sqrt{27},...,\sqrt{48}\right\}\Rightarrow \text{card}\,B=24$;

b) $\text{card}\,A=201$ elemente.

Numărul de elemente raţionale este de 15, şi anume: $\left\{\sqrt{0^2},\sqrt{1^2},\sqrt{2^2},\sqrt{3^2},...,\sqrt{14^2}\right\}$.

16. Determinaţi cel mai mare număr întreg mai mic decât $x=\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{5}+\sqrt{6}+\sqrt{7}+\sqrt{15}+\sqrt{21}}{\sqrt{2}+\sqrt{5}+\sqrt{7}}$

Rezolvare:

$$x=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{5}+\sqrt{6}+\sqrt{7}+\sqrt{3}\cdot\sqrt{5}+\sqrt{3}\cdot\sqrt{7}}{\sqrt{2}+\sqrt{5}+\sqrt{7}}=\frac{\left(\sqrt{2}+\sqrt{5}+\sqrt{7}\right)+\sqrt{3}\cdot\left(\sqrt{2}+\sqrt{5}+\sqrt{7}\right)}{\sqrt{2}+\sqrt{5}+\sqrt{7}}$$

$$x=\frac{\left(\sqrt{2}+\sqrt{5}+\sqrt{7}\right)\cdot\left(\sqrt{3}+1\right)}{\sqrt{2}+\sqrt{5}+\sqrt{7}}=\sqrt{3}+1\cong 2{,}71\Rightarrow$$

că cel mai mare număr întreg mai mic decât *x* este 2.

17. Se dau numerele nenule a, b, c, d, astfel încât numărul $n=\dfrac{a-b\sqrt{2}}{c-d\sqrt{2}}$ este raţional. Arătaţi că numărul $m=a\cdot b\cdot c\cdot d$ este pătrat perfect.

Rezolvare:

$$n={}^{c+d\sqrt{2})}\frac{a-b\sqrt{2}}{c-d\sqrt{2}}=\frac{\left(a-b\sqrt{2}\right)\cdot\left(c+d\sqrt{2}\right)}{\left(c-d\sqrt{2}\right)\cdot\left(c+d\sqrt{2}\right)}=\frac{ac-bc\sqrt{2}+ad\sqrt{2}-2bd}{c^2-2d^2}=\frac{ac-2bd+\sqrt{2}\cdot(ad-bc)}{c^2-2d^2}\in Q$$

$\Leftrightarrow ad-bc=0\Rightarrow ad=bc$

$m=a\cdot b\cdot c\cdot d=(b\cdot c)^2=$ pătrat perfect.

18. Calculaţi expresia: $E=\frac{1}{\sqrt{2}+1}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+...+\frac{1}{\sqrt{2012}+\sqrt{2011}}$.

Rezolvare:

$$E=\frac{1}{\sqrt{2}+1}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+...+\frac{1}{\sqrt{2012}+\sqrt{2011}}=\frac{\sqrt{2}-1}{2-1}+\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{3-2}+...+\frac{\sqrt{2012}-\sqrt{2011}}{2012-2011}$$

$$\Rightarrow E=\sqrt{2}-1+\sqrt{3}-\sqrt{2}+...+\sqrt{2012}-\sqrt{2011}\Rightarrow E=\sqrt{2012}-1.$$

19. Fie $a=\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+...+\frac{1}{100^2}$. Demonstraţi că $0{,}2<\sqrt{\frac{a}{11}}<0{,}3$.

Rezolvare:

$$a=\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+...+\frac{1}{100^2}=\frac{1}{2\cdot 2}+\frac{1}{3\cdot 3}+...+\frac{1}{100\cdot 100}<\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+...+\frac{1}{99\cdot 100}\Rightarrow$$

$$a<1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+...+\frac{1}{99}-\frac{1}{100}=1-\frac{1}{100}=\frac{99}{100}$$

$$a<\frac{99}{100}\Rightarrow\frac{a}{11}<\frac{99}{100}\cdot\frac{1}{11}\Rightarrow\frac{a}{11}<\frac{9}{100}\Rightarrow\sqrt{\frac{a}{11}}<\sqrt{\frac{9}{100}}\Rightarrow\sqrt{\frac{a}{11}}<0{,}3 \qquad (1)$$

$$a=\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+...+\frac{1}{100^2}=\frac{1}{2\cdot 2}+\frac{1}{3\cdot 3}+...+\frac{1}{100\cdot 100}>\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+...+\frac{1}{100\cdot 101}\Rightarrow$$

$$a>\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+...+\frac{1}{100}-\frac{1}{101}=\frac{1}{2}-\frac{1}{101}=\frac{99}{202}$$

$$a>\frac{99}{202}\Rightarrow\frac{a}{11}>\frac{99}{202}\cdot\frac{1}{11}\Rightarrow\frac{a}{11}>\frac{9}{202}\Rightarrow\sqrt{\frac{a}{11}}>\sqrt{\frac{9}{202}}\cong 0{,}21\Rightarrow\sqrt{\frac{a}{11}}>0{,}2 \qquad (2)$$

Din relaţiile (1) şi (2) $\Rightarrow$ că are loc: $0{,}2<\sqrt{\frac{a}{11}}<0{,}3$

20. a) Demonstraţi că: $2\sqrt{n\cdot(n+1)}<2n+1,\ \forall n\in N$;

b) Arătaţi că: $\frac{\sqrt{1\cdot 2}}{3}\cdot\frac{\sqrt{2\cdot 3}}{5}\cdot\frac{\sqrt{3\cdot 4}}{7}\cdot...\cdot\frac{\sqrt{2010\cdot 2011}}{4021}<\frac{1}{2^{2010}}$.

Rezolvare:

a) $2\sqrt{n\cdot(n+1)}<2n+1\ \ (\ )^2\Rightarrow 4\cdot n\cdot(n+1)<(2n+1)^2\Rightarrow 4n^2+4n<4n^2+4n+1\Rightarrow 0<1$, adevărat.

b) Utilizând din aproape în aproape relaţia demonstrată la punctul a): $\sqrt{n\cdot(n+1)}<\frac{2n+1}{2}\Rightarrow$

$$\begin{cases}\sqrt{1\cdot 2}<\frac{2\cdot 1+1}{2}=\frac{3}{2}\\ \sqrt{2\cdot 3}<\frac{5}{2}\\ \text{.......... ....}\\ \sqrt{2010\cdot 2011}<\frac{4021}{2}\end{cases}\Rightarrow \text{prin înmulţire că } \frac{\sqrt{1\cdot 2}}{3}\cdot\frac{\sqrt{2\cdot 3}}{5}\cdot\frac{\sqrt{3\cdot 4}}{7}\cdot...\cdot\frac{\sqrt{2010\cdot 2011}}{4021}<\underbrace{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot...\cdot\frac{1}{2}}_{\text{2010 factori}}$$

$$\Rightarrow\frac{\sqrt{1\cdot 2}}{3}\cdot\frac{\sqrt{2\cdot 3}}{5}\cdot\frac{\sqrt{3\cdot 4}}{7}\cdot...\cdot\frac{\sqrt{2010\cdot 2011}}{4021}<\frac{1}{2^{2010}}.$$

C.I. CALCUL ALGEBRIC

C.I.1. CALCULE CU NUMERE REALE REPREZENTATE PRIN LITERE

Adunarea şi scăderea numerelor reale reprezentate prin litere

Definiţie: Suma algebrică este o succesiune de adunări şi scăderi de numere reale reprezentate prin litere.

Exemplu: În suma algebrică: $6a+2xy^2+3a+\sqrt{3}-0,8xy^2+12\sqrt{3}-2a$, avem:

- ***termeni asemenea***
  - $6a; 3a; -2a$ a căror sumă este: $6a+3a-2a=a\cdot(6+3-2)=7a$,
  - $2xy^2; -0,8xy^2$ a căror sumă este: $2xy^2-0,8xy^2=xy^2\cdot(2-0,8)=1,2\cdot xy^2$,
  - $\sqrt{3}; 12\sqrt{3}$ a căror sumă este: $\sqrt{3}+12\sqrt{3}=\sqrt{3}\cdot(1+12)=13\sqrt{3}$.

Prin adunarea termenilor asemenea obţinem ***reducerea termenilor asemenea***, adică:

$6a+2xy^2+3a+\sqrt{3}-0,8xy^2+12\sqrt{3}-2a=7a+1,2\cdot xy^2+13\sqrt{3}$.

- ***coeficienţii termenilor***
  - $\begin{cases} 6a \leftarrow 6 \text{ este coeficient} \\ 3a \leftarrow 3 \text{ este coeficient} \\ -2a \leftarrow -2 \text{ este coeficient} \end{cases}$;
  - $\begin{cases} 2xy^2 \leftarrow 2 \text{ este coeficient} \\ -0,8xy^2 \leftarrow -0,8 \text{ este coeficient} \end{cases}$;
  - $\begin{cases} \sqrt{3} \leftarrow \text{termen liber} \\ 12\sqrt{3} \leftarrow \text{termen liber} \end{cases}$.
- ***litere:*** *a, x, y.*

Proprietăţile adunării numerelor reale reprezentate prin litere sunt aceleaşi ca şi proprietăţile adunării numerelor reale, prevăzute în paragraful B.I.6, adică: asociativitatea, existenţa elementului neutru, existenţa unui opus şi comutativitatea.

Exemple:

- $x+2x+3x+...+9x=x\cdot(1+2+3+...+9)=x\cdot\frac{9\cdot 10}{2}=45x$;
- $(4x-b^2)+(8x-2b^2)+(12x-3b^2)+(16x-4b^2)=$
  $=(4x-b^2)+2\cdot(4x-b^2)+3\cdot(4x-b^2)+4\cdot(4x-b^2)=(4x-b^2)\cdot(1+2+3+4)=10\cdot(4x-b^2)$;
- Dacă $2x+3y=13$ şi $3x+2y=12$, atunci:
  $5x+5y=25 \Rightarrow x+y=5$,
  $x-y=-1$,
  $10x+15y=65$,
  $6x+4y=24$.

Înmulţirea, împărţirea şi ridicarea la putere a numerelor reale reprezentate prin litere

Proprietăţile înmulţirii numerelor reale reprezentate prin litere sunt aceleaşi ca şi proprietăţile înmulţirii numerelor reale, prevăzute în paragraful B.I.6, adică: asociativitatea, existenţa elementului neutru, distributivitatea înmulţirii faţă de adunare şi scădere, precum şi comutativitatea.

De asemenea, toate ***regulile de ridicare la putere*** a numerelor reale, prezentate în paragraful B.I.6, sunt valabile şi în cazul ridicării la putere a numerelor reale reprezentate prin litere.

Definiţie: Fie $a \in R^*$. Numărul $\frac{1}{a}$ se numeşte ***inversul lui a*** şi are loc egalitatea: $a \cdot \frac{1}{a} = \frac{1}{a} \cdot a = 1$.
Astfel, putem defini ***împărţirea*** a două numere date, ca fiind înmulţirea primului număr cu inversul celui de-al doilea, al doilea număr fiind nenul. Prin urmare, $a : b = a \cdot \frac{1}{b} = \frac{a}{b},\ b \neq 0$.

Exemple:

- $(3x)\cdot\left(-6x^4\right) = 3\cdot(-6)\cdot\left(x\cdot x^4\right) = -18\cdot x^5$;
- $\left(\frac{2}{3}ax\right)\cdot\left(\frac{3}{4}a^2y^5\right) = \left(\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\right)\cdot\left(a\cdot a^2\right)\cdot xy^5 = \frac{a^3xy^5}{2}$;
- $\left(14x^3 - 28x^2\right):\left(14x^2\right) = \left(14x^3 : 14x^2\right) - \left(28x^2 : 14x^2\right) = x - 2$;
- $(7ab)\cdot(-2ab) - 5a^2\cdot 3b^2 + 3a\cdot\left(10ab^2\right) = -14a^2b^2 - 15a^2b^2 + 30a^2b^2 =$
  $= a^2b^2\cdot(14 - 15 + 30) = 29a^2b^2$;
- $\left(-\frac{2a^3b^2}{3x}\right)^4 = \frac{16a^{12}b^8}{81x^4}$;
- $a^{20} : (-a)^{16} + 5a(-a)^3 + (-2a)^2 = a^{20} : a^{16} - 5a^4 + 4a^2 = a^4 - 5a^4 + 4a^2 = 4a^2 - 4a^4$
  $= 4a^2 - 4a^4 = 4a^2\cdot\left(1 - a^2\right),\ a \neq 0$;
- $x\cdot x^2\cdot x^3\cdot\ldots\cdot x^{99} = x^{1+2+\ldots+99} = x^{\frac{99\cdot 100}{2}} = x^{4950}$;
- Pentru $xy = 6,\ yz = 8,\ xz = 10 \Rightarrow x^2y^2z^2 = xy\cdot yz\cdot xz = 480$.

C.I.2. FORMULE DE CALCUL PRESCURTAT

- $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
- $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
- $(a-b)\cdot(a+b) = a^2 - b^2$
- $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
- $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$
- $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2\cdot(ab + ac + bc)$
- $a^3 + b^3 = (a+b)\cdot\left(a^2 - ab + b^2\right)$
- $a^3 - b^3 = (a-b)\cdot\left(a^2 + ab + b^2\right)$

Exemple:

- $(1+a)^2+(2+a)^2+(3+a)^2=1+2a+a^2+4+4a+a^2+9+6a+a^2=3a^2+12a+14$;
- $(2x-3y)^2=(2x)^2-2\cdot 2x\cdot 3y+(3y)^2=4x^2-12xy+9y^2$;
- $(m+2n)\cdot(m-2n)=m^2-(2n)^2=m^2-4n^2$;
- $(a-2b+2c)^2=a^2+4b^2+4c^2-4ab+4ac-8bc$;
- $(x+3y)^3=x^3+9x^2y+27xy^2+27y^3$;
- $8x^3-27y^3=(2x)^3-(3y)^3=(2x-3y)\cdot\left(4x^2+6xy+9y^2\right)$;
- $64a^6+8b^3=\left(4a^2\right)^3+(2b)^3=\left(4a^2+2b\right)\cdot\left(16a^4-8a^2b+4b^2\right)$;
- $(2x-y)^3=8x^3-12x^2y+6xy^2-y^3$.

C.I.3. METODE DE DESCOMPUNERE ÎN FACTORI

Metoda factorului comun

Formula $a\cdot(b_1+b_2+...+b_n)=a\cdot b_1+a\cdot b_2+...+a\cdot b_n$ reprezintă distributivitatea înmulţirii faţă de adunare.

Dacă scriem această formulă invers, obţinem formula de scoatere a factorului comun: $a\cdot b_1+a\cdot b_2+...+a\cdot b_n=a\cdot(b_1+b_2+...+b_n)$.

Exemple:

- $2012\cdot 2011+2010\cdot 2012-4023\cdot 2012=2012\cdot(2011+2010-4023)=-2\cdot 2012=-4024$;
- $(a+1)^3+(a+1)^2-a\cdot(a+1)=(a+1)\cdot\left[(a+1)^2+a+1-a\right]=(a+1)\cdot\left(a^2+2a+2\right)$;
- $(x-6)^3+(x+1)\cdot(x-6)^2-(5-3x)\cdot(x-6)^2=(x-6)^2\cdot(x-6+x+1-5+3x)=$
  $=5\cdot(x-2)\cdot(x-6)^2$;
- $\sqrt{12}a^3b^3-\sqrt{27}a^2b^2+\sqrt{48}a^3b^2-\sqrt{75}a^2b^3=2\sqrt{3}a^3b^3-3\sqrt{3}a^2b^2+4\sqrt{3}a^3b^2-5\sqrt{3}a^2b^3=$
  $=\sqrt{3}a^2b^2\cdot(2ab-3+4a-5b)$.

Metoda restrângerii utilizând formulele de calcul prescurtat

- $a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$
- $a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$
- $a^2-b^2=(a-b)\cdot(a+b)$
- $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3=(a+b)^3$
- $a^3-3a^2b+3ab^2-b^3=(a-b)^3$
- $a^2+b^2+c^2+2\cdot(ab+ac+bc)=(a+b+c)^2$
- $(a+b)\cdot\left(a^2-ab+b^2\right)=a^3+b^3$
- $(a-b)\cdot\left(a^2+ab+b^2\right)=a^3-b^3$

Exemple:

- $a^3 - 64 = a^3 - 4^3 = (a-4)\cdot(a^2 - 4a + 16)$;
- $x^4 + 6x^2y + 9y^2 = (x^2)^2 + 2\cdot x^2\cdot(3y) + (3y)^2 = (x^2 + 3y)^2$;
- $a^2 - a + \frac{1}{4} = a^2 - 2\cdot\frac{1}{2}\cdot a + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \left(a - \frac{1}{2}\right)^2$;
- $16 - 4a^2 = 4^2 - (2a)^2 = (4-2a)\cdot(4+2a) = 4\cdot(2-a)\cdot(2+a)$;
- $a^2b^2c^2 - x^2y^2z^2 = (abc)^2 - (xyz)^2 = (abc - xyz)\cdot(abc + xyz)$;
- $x^2 + y^2 + 9 + 2xy + 6x + 6y = (x+y+3)^2$;
- $8x^3 - 60x^2y + 150xy^2 - 125y^3 = (2x-5y)^3$.

Metode combinate de descompuneri în factori

Exemple:

- $3a^2 + 3ab + 2ab^2 + 2b^3 = 3a\cdot(a+b) + 2b^2\cdot(a+b) = (a+b)\cdot(3a + 2b^2)$;
- $9\cdot(x-2)^2 - 1 = [3\cdot(x-2)]^2 - 1 = [3\cdot(x-2)-1]\cdot[3\cdot(x-2)+1] = (3x-7)\cdot(3x-5)$;
- $\frac{25\cdot x^2}{y^2} + 10 + \frac{y^2}{x^2} = \left(\frac{5x}{y}\right)^2 + 2\cdot\frac{5x}{y}\cdot\frac{y}{x} + \left(\frac{y}{x}\right)^2 = \left(\frac{5x}{y} + \frac{y}{x}\right)^2$;
- $(x^2 + 2x + 1) - (y^2 - 4y + 4) = (x+1)^2 - (y-2)^2 = (x+1+y-2)\cdot(x+1-y+2) =$
  $= (x+y-1)\cdot(x-y+3)$;
- $9a^2b + 4a^3 - 9b^3 - 4a^2b = 4a^2\cdot(a-b) + 9b\cdot(a-b)\cdot(a+b) = (a-b)\cdot(4a^2 + 9ab + 9b^2)$.

C.I.4. ECUAŢIA DE FORMA $x^2 = a,\ a \in Q$

A rezolva ecuaţia $x^2 = a,\ a \in Q$ presupune a determina toate valorile $x_0 \in M, M \subseteq R$, pentru care propoziţia $x_0^2 = a$ este adevărată.

Etapele de rezolvare a ecuaţiei presupune discuţia a trei cazuri:

- dacă $a < 0 \Rightarrow$ soluţia S = ø, deoarece $x^2 \geq 0$,
- dacă a = 0, atunci ecuaţia devine: $x^2 = 0 \Rightarrow S = \{0\}$,
- dacă $a > 0 \Rightarrow S = \{\pm\sqrt{a}\}$.

Exemple:

- $3x^2 = 2 + (-1)^{2012} \Rightarrow 3x^2 = 2 + 1 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x \in \{\pm 1\}$;
- $(x-3)\cdot(x+3) + 9 = 9 \Rightarrow (x-3)\cdot(x+3) = 0 \Rightarrow x \in \{\pm 3\}$;
- $\frac{x^2}{\sqrt{7} - \sqrt{3}} = \sqrt{7} + \sqrt{3} \Rightarrow x^2 = (\sqrt{7} + \sqrt{3})\cdot(\sqrt{7} - \sqrt{3}) \Rightarrow x^2 = 7 - 3 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x \in \{\pm 2\}$;
- $(2x-1)^2 = 16 \Rightarrow 2x - 1 = \pm 4 \Rightarrow x \in \left\{-\frac{3}{2}; \frac{5}{2}\right\}$;
- $\frac{x+1}{9} = \frac{4}{x+1} \Rightarrow (x+1)^2 = 36 \Rightarrow x + 1 = \pm 6 \Rightarrow x \in \{-7; 5\}$.

C.I.5. EXERCIŢII ŞI PROBLEME

1. Dacă $x \in R$, calculaţi $(x-2x)+(3x-4x)+(5x-6x)+(7x-8x)$.

Rezolvare:

$(x-2x)+(3x-4x)+(5x-6x)+(7x-8x)=-x-x-x-x=-4x$.

2. Descompuneţi în factori: $\frac{1}{625}-a^4$.

Rezolvare:

$$\frac{1}{625}-a^4=\left(\frac{1}{5}\right)^4-a^4=\left(\frac{1}{5^2}\right)^2-\left(a^2\right)^2=\left(\frac{1}{25}-a^2\right)\cdot\left(\frac{1}{25}+a^2\right)=\left(\frac{1}{5}-a\right)\cdot\left(\frac{1}{5}+a\right)\cdot\left(\frac{1}{25}+a^2\right)$$

3. Determinaţi $a,b \in Z$ ştiind că $\left(\sqrt{5}-2\right)^2=a+b\sqrt{5}$.

Rezolvare:

$$\left(\sqrt{5}-2\right)^2=a+b\sqrt{5} \Rightarrow 5-4\sqrt{5}+4=a+b\sqrt{5} \Rightarrow 9-4\sqrt{5}=a+b\sqrt{5} \Rightarrow \begin{cases} a=9 \\ b=-4 \end{cases}$$

4. Descompuneţi în factori expresia: $25x^2-110ax+121a^2$.

Rezolvare:

$25x^2-110\cdot a\cdot x+121\cdot a^2=(5x)^2-2\cdot 5\cdot 11\cdot a\cdot x+(11\cdot a)^2=(5x-11a)^2$.

5. Arătaţi că $\left(x^2-7x\right)\cdot\left(x^2-7x+2\right)+1,\ \forall x \in Z$ este pătrat perfect.

Rezolvare:

Notăm $x^2-7x=t$

$\Rightarrow t\cdot(t+2)+1=t^2+2t+1=(t+1)^2 \Rightarrow \left(x^2-7x\right)\cdot\left(x^2-7x+2\right)+1=\left(x^2-7x+1\right)^2$

6. Ştiind că $x+3y-z=4$, să se calculeze suma:

$S=(x+3y-z)+(2x+6y-2z)+(3x+9y-3z)+...+(11x+33y-11z)$.

Rezolvare:

$S=(x+3y-z)+2\cdot(x+3y-z)+3\cdot(x+3y-z)+...+11\cdot(x+3y-z)$

$S=(x+3y-z)\cdot(1+2+3+...+11)=(x+3y-z)\cdot\frac{12\cdot 11}{2}=66\cdot(x+3y-z)$.

7. Fie $a,b \in N^*$, numere care verifică relaţia: $3\sqrt{a}=b\sqrt{2}$. Să se calculeze valoarea raportului $\frac{a}{b^2}$, precum şi valoarea lui b, pentru a=16.

Rezolvare:

$3\sqrt{a}=b\sqrt{2}\quad (\ )^2 \Rightarrow 9a=2b^2 \Rightarrow \frac{a}{b^2}=\frac{2}{9}$.

Pentru a = 16 avem: $3\sqrt{16}=b\sqrt{2} \Rightarrow 12=b\sqrt{2} \Rightarrow b=\frac{12}{\sqrt{2}}=\frac{12\sqrt{2}}{2}=6\sqrt{2}$.

8. Calculaţi x^2, ştiind că: $x=\sqrt{\sqrt{2}\left(\sqrt{2}-\sqrt{5}\right)-\sqrt{5}\left(\sqrt{2}-\sqrt{5}\right)}+\sqrt{\sqrt{2}\left(\sqrt{2}+\sqrt{5}\right)+\sqrt{5}\left(\sqrt{2}+\sqrt{5}\right)}$.

Rezolvare:

$$x=\sqrt{2-\sqrt{10}-\sqrt{10}+5}+\sqrt{2+\sqrt{10}+\sqrt{10}+5}=\sqrt{7-2\sqrt{10}}+\sqrt{7+2\sqrt{10}}$$

$$x^2=\left(\sqrt{7-2\sqrt{10}}+\sqrt{7+2\sqrt{10}}\right)^2=7-2\sqrt{10}+2\cdot\sqrt{7-2\sqrt{10}}\sqrt{7+2\sqrt{10}}+7+2\sqrt{10}$$

$$x^2=14+2\cdot\sqrt{7^2-(2\sqrt{10})^2}=14+2\cdot 3=20.$$

9. Dacă $x-y=3$ şi $x^2-y^2=12$, determinaţi numărul $a=(x+y)+(x+y)^2+(x+y)^3$.

Rezolvare:

$$x^2-y^2=12\Rightarrow(x-y)\cdot(x+y)=12\Rightarrow x+y=4$$

$$\Rightarrow a=(x+y)+(x+y)^2+(x+y)^3=4+4^2+4^3=4+16+64=84.$$

10. Scoateţi factor comun: $\frac{3}{\sqrt{3}}x^{n-1}+\frac{8}{\sqrt{12}}x^n-\frac{18}{\sqrt{108}}x^{n+1}+\frac{40}{2\sqrt{300}}x^{n-2}, n\in N, n>2$.

Rezolvare:

$$\frac{3}{\sqrt{3}}x^{n-1}+\frac{8}{\sqrt{12}}x^n-\frac{18}{\sqrt{108}}x^{n+1}+\frac{40}{2\sqrt{300}}x^{n-2}=\frac{3}{\sqrt{3}}x^{n-1}+\frac{8}{2\sqrt{3}}x^n-\frac{18}{6\sqrt{3}}x^{n+1}+\frac{40}{20\sqrt{3}}x^{n-2}=$$

$$=\frac{3}{\sqrt{3}}x^{n-1}+\frac{4}{\sqrt{3}}x^n-\frac{3}{\sqrt{3}}x^{n+1}+\frac{2}{\sqrt{3}}x^{n-2}=\frac{x^{n-1}}{\sqrt{3}}\cdot\left(3+4x-3x^2+2x^{-1}\right)$$

11. Arătaţi că $x^{16}-3^{16}=(x-3)(x+3)\left(x^2+9\right)\left(x^4+81\right)\left(x^8+3^8\right)$.

Rezolvare:

$$x^{16}-3^{16}=\left(x^8\right)^2-\left(3^8\right)^2=\left(x^8-3^8\right)\cdot\left(x^8+3^8\right)=\left[\left(x^4\right)^2-\left(3^4\right)^2\right]\cdot\left(x^8+3^8\right)=$$

$$=\left(x^4-3^4\right)\cdot\left(x^4+3^4\right)\cdot\left(x^8+3^8\right)=\left[\left(x^2\right)^2-\left(3^2\right)^2\right]\cdot\left(x^4+3^4\right)\cdot\left(x^8+3^8\right)=$$

$$=\left(x^2-3^2\right)\cdot\left(x^2+3^2\right)\cdot\left(x^4+3^4\right)\cdot\left(x^8+3^8\right)=(x-3)(x+3)\left(x^2+9\right)\left(x^4+81\right)\left(x^8+3^8\right)$$

12. Se consideră $x\in R^*$. Calculaţi $x^2+\frac{1}{x^2}$, ştiind că $x-\frac{1}{x}=5$.

Rezolvare:

$$x-\frac{1}{x}=5\quad(\;)^2\Rightarrow\left(x-\frac{1}{x}\right)^2=25\Rightarrow x^2-2+\frac{1}{x^2}=25\Rightarrow x^2+\frac{1}{x^2}=27.$$

13. Arătaţi că are loc egalitatea $\forall a,b\in R^*:(a+b)\cdot\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)=2+\frac{a}{b}+\frac{b}{a}$.

Rezolvare:

$$(a+b)\cdot\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)=a\cdot\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)+b\cdot\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)=1+\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+1=2+\frac{a}{b}+\frac{b}{a}.$$

14. Aflaţi media aritmetică a numerelor:

$a=\left(\sqrt{n}+1\right)^2+\left(\sqrt{n}-1\right)^2$ şi $b=\left(\sqrt{n+1}+1\right)^2-\left(\sqrt{n+1}-1\right)^2$, $n\in N$.

Rezolvare:

$$a=\left(\sqrt{n}+1\right)^2+\left(\sqrt{n}-1\right)^2=n+2\sqrt{n}+1+n-2\sqrt{n}+1=2n+2$$

$$b=\left(\sqrt{n+1}+1\right)^2-\left(\sqrt{n+1}-1\right)^2=n+1+2\sqrt{n+1}+1-\left(n+1-2\sqrt{n+1}+1\right)$$

$$b=n+2+2\sqrt{n+1}-\left(n+2-2\sqrt{n+1}\right)=n+2+2\sqrt{n+1}-n-2+2\sqrt{n+1}=4\sqrt{n+1}$$

$$m_a=\frac{a+b}{2}=\frac{2n+2+4\sqrt{n+1}}{2}=n+1+2\sqrt{n+1}$$

15. Dacă $a,b,c\in R$, astfel încât $a-2b+3c=7\sqrt{2}$, atunci are loc egalitatea:

$\left(a-\sqrt{2}\right)^2+\left(b+2\sqrt{2}\right)^2+\left(c-3\sqrt{2}\right)^2=a^2+b^2+c^2$.

Rezolvare:

$$a^2-2\sqrt{2}a+2+b^2+4\sqrt{2}b+8+c^2-6\sqrt{2}c+18=a^2+b^2+c^2\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 28-2\sqrt{2}\cdot(a-2b+3c)=0\Rightarrow 28-2\sqrt{2}\cdot 7\sqrt{2}=0\Rightarrow 0=0$$

16. Aflaţi numerele întregi x şi y ştiind că $\sqrt{(x+6)^2}+\sqrt{(y-2)^2}=1$.

Rezolvare:

$$\sqrt{(x+6)^2}+\sqrt{(y-2)^2}=1.\Rightarrow |x+6|+|y-2|=1$$

Avem posibilităţile:

$$\begin{cases}|x+6|=1\\|y-2|=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x+6=\pm1\\y=2\end{cases}\Rightarrow (x;y)=\{(-7;2);(-5;2)\}$$

sau

$$\begin{cases}|x+6|=0\\|y-2|=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x+6=0\\y-2=\pm1\end{cases}\Rightarrow (x;y)=\{(-6;1);(-6;3)\}$$

17. Fie $A=\left\{\frac{n+1000}{n+17}\middle|n\in N\right\}$. Arătaţi că mulţimea $A\cap N$ are un singur element.

Rezolvare:

$$\frac{n+1000}{n+17}=\frac{n+17+983}{n+17}=1+\frac{983}{n+17}$$

$$n+17|983\Rightarrow n+17\in\{1;983\}\Rightarrow$$

$$n+17=1\Rightarrow n=-16\notin N$$

$$n+17=983\Rightarrow n=966\in N$$

983 = număr prim

$$\frac{n+1000}{n+17}=\frac{1966}{983}=2\in N$$

18. Arătaţi că $\sqrt{124+11\sqrt{12}}+\sqrt{28-5\sqrt{12}}$ este un număr natural, pătrat perfect.

Rezolvare:

Cea mai uşoară modalitate de rezolvare este de a aplica ***formulele radicalilor compuşi***:

$$\boxed{\begin{array}{l} \sqrt{a+\sqrt{b}}=\sqrt{\dfrac{a+c}{2}}+\sqrt{\dfrac{a-c}{2}} \\ \sqrt{a-\sqrt{b}}=\sqrt{\dfrac{a+c}{2}}-\sqrt{\dfrac{a-c}{2}} \end{array} \quad , \text{ cu } c=\sqrt{a^2-b}.}$$

$$\sqrt{124+11\sqrt{12}}=\sqrt{124+\sqrt{11^2\cdot 12}}=\sqrt{\frac{124+118}{2}}+\sqrt{\frac{124-118}{2}}=\sqrt{121}+\sqrt{3}=11+\sqrt{3}$$

$$c=\sqrt{124^2-11^2\cdot 12}=\sqrt{13924}=\sqrt{118^2}=118$$

$$\sqrt{28-5\sqrt{12}}=\sqrt{28-\sqrt{5^2\cdot 12}}=\sqrt{\frac{28+22}{2}}-\sqrt{\frac{28-22}{2}}=5-\sqrt{3}$$

$$c=\sqrt{28^2-300}=\sqrt{484}=\sqrt{22^2}=22$$

19. Dacă $a,b,c\in R_+$ şi $abc=1$, atunci $a^2+b^2+c^2\geq \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$.

Rezolvare:

$$a^2+b^2+c^2\geq \frac{bc+ac+ab}{abc}\Rightarrow a^2+b^2+c^2\geq bc+ac+ab\Rightarrow \left(a^2+b^2+c^2\right)-(ab+ac+bc)\geq 0$$

$$\begin{cases} (a-b)^2=a^2-2ab+b^2 \\ (b-c)^2=b^2-2bc+c^2 \\ (c-a)^2=c^2-2ac+a^2 \end{cases}$$

Prin însumare, rezultă:

$$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=2\cdot\left(a^2+b^2+c^2\right)-2\cdot(ab+ac+bc)$$

$$\Rightarrow \frac{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2}{2}=\left(a^2+b^2+c^2\right)-(ab+ac+bc)\geq 0 \text{ adevărat}$$

20. Fie numerele $x,y\in R^*$, astfel încât $4x^2+9xy+5y^2=0$. Arătaţi că $\frac{2x+3y}{3x+4y}\in N$.

Rezolvare:

$$4x^2+4xy+5xy+5y^2=0\Rightarrow 4x\cdot(x+y)+5y\cdot(x+y)=0\Rightarrow (x+y)\cdot(4x+5y)=0$$

Variante posibile:

- $x+y=0\Rightarrow x=-y\Rightarrow \dfrac{2x+3y}{3x+4y}=\dfrac{-2y+3y}{-3y+4y}=\dfrac{y}{y}=1\in N$,

sau

- $4x+5y=0\Rightarrow 4x=-5y\Rightarrow x=-\dfrac{5y}{4}\Rightarrow \dfrac{2x+3y}{3x+4y}=\dfrac{2\cdot\left(-\dfrac{5y}{4}\right)+3y}{3\cdot\left(-\dfrac{5y}{4}\right)+4y}=\dfrac{2y}{y}=2\in N$.

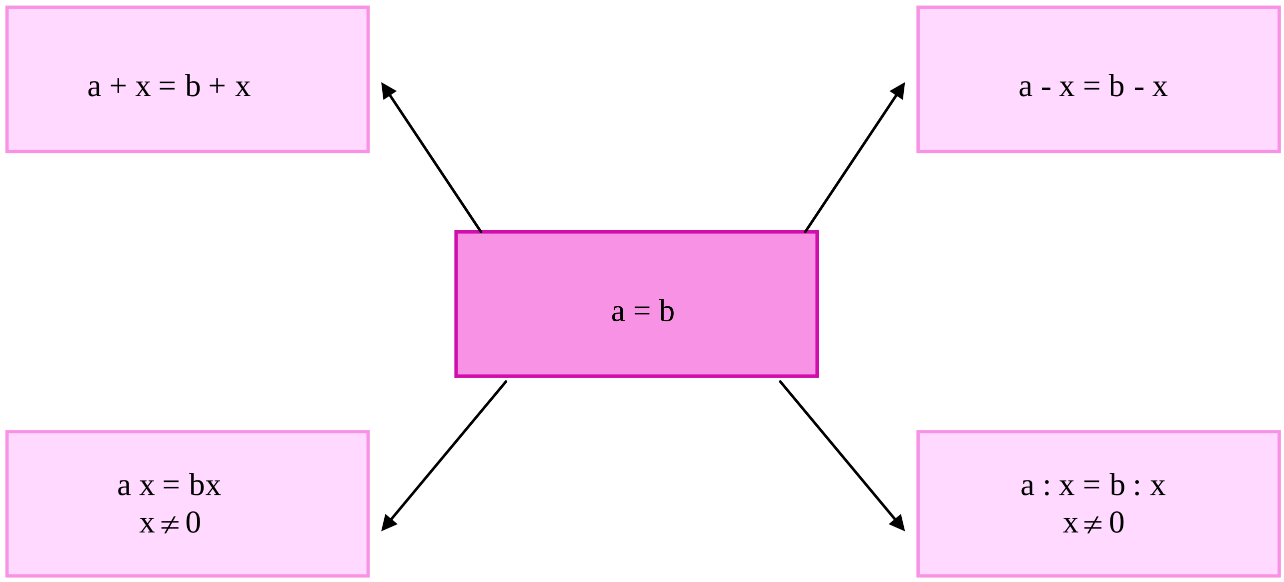
D1. ECUAŢII ŞI INECUAŢII

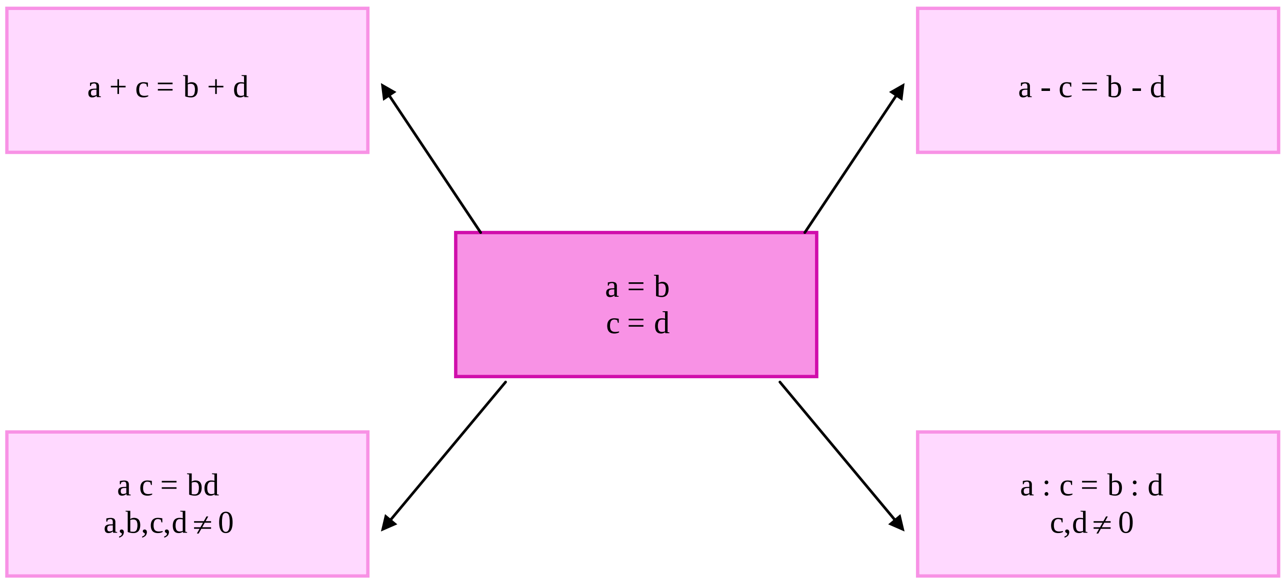
D.I.1. RELAŢIA DE EGALITATE ÎN MULŢIMEA NUMERELOR REALE

Proprietăţile relaţiei de egalitate „=" pe R sunt:

- reflexivitatea: $x = x,\ \forall x \in R$;
- simetria: dacă $x = y$, atunci şi $y = x,\ \forall x, y \in R$;
- tranzitivitatea: dacă $x = y$ şi $y = z \Rightarrow x = z,\ \forall x, y, z \in R$.

În sintezele ce urmează voi figura câteva ***proprietăţi de compatibilitate*** între relaţia de egalitate şi operaţiile cu numere reale, pentru orice valori reale ale lui *a* şi *b*.





Exemple:

- dacă $a + b + 2c = 4$ şi $3a - 2b + c = 7$, atunci
  - $4a - b + 3c = 11$;
  - $2a - 3b - c = 3$.
- Pentru a demonstra că, dacă $a^2 + b^2 = -2ab$, atunci $a = -b$, se procedează astfel:

$$a^2 + b^2 = -2ab \;\big|+2ab \Rightarrow a^2 + 2ab + b^2 = 0 \Rightarrow (a+b)^2 = 0 \Rightarrow a + b = 0 \Rightarrow a = -b$$

D.I.2. ECUAŢII DE GRADUL I

Forma generală a unei ecuaţii cu coeficienţi reali este: $ax+b=0,\ a,b\in R,\ a\neq 0$, în care *a* şi *b* se numesc *coeficienţi*, iar *x* se numeşte *necunoscută* sau *variabilă*. Se spune că *a* este *coeficientul necunoscutei*, iar *b* este *termenul liber*.
Această formă generală a unei ecuaţii cu coeficienţi reali de gradul I mai poartă numele de *ecuaţie de gradul I* cu necunoscuta *x*.

Soluţia unei ecuaţii cu coeficienţi reali este un număr $x_0\in R$ pentru care propoziţia $ax_0+b=0,\ a,b\in R,\ a\neq 0$ este adevărată.

Rezolvarea unei ecuaţii presupune determinarea tuturor soluţiilor sale. Dacă ecuaţia nu are nici o soluţie, atunci vom scrie mulţimea vidă.

Ecuaţiile echivalente sunt acele ecuaţii cu aceeaşi mulţime de soluţii.

Etapele rezolvării unei ecuaţii de gradul I sunt:

- $ax+b=0\ \big|-b \Rightarrow ax=-b$;
- $ax=-b\ \Big|\cdot\frac{1}{a},\ a\neq 0 \Rightarrow x=-\frac{b}{a}$;
- $\Rightarrow x=-\frac{b}{a}\in R$ şi este soluţia ecuaţiei date: $\Rightarrow S=\left\{-\frac{b}{a}\right\}$.

Exemple:

- $\left(2-\sqrt{3}\right)\cdot x-5=0\ \big|+5 \Rightarrow \left(2-\sqrt{3}\right)\cdot x=5 \Rightarrow x={}^{2+\sqrt{3})}\frac{5}{2-\sqrt{3}}=\frac{5\cdot\left(2+\sqrt{3}\right)}{4-3}=5\cdot\left(2+\sqrt{3}\right)$;
- Pentru a determina valoarea lui $m\in R$ pentru care ecuaţia $2x-m(x+3)=7mx+12$ are soluţia 5, procedăm la înlocuirea lui x cu 5, astfel:
  $10-8m=35m+12 \Rightarrow -2=43m \Rightarrow m=-\frac{2}{43}$.

D.I.3. RELAŢII DE INEGALITATE ÎN MULŢIMEA NUMERELOR REALE

Pentru $a,b\in R$, se cunosc următoarele tipuri de relaţii de inegalitate:

- spunem că „*a* este mai mic decât *b*” şi scriem $a<b$, dacă în reprezentarea pe axa numerelor reale cu sensul pozitiv spre dreapta numărul *a* este poziţionat în stânga numărului *b*;
- spunem că „*a* este mai mare decât *b*” şi scriem $a>b$, dacă în reprezentarea pe axa numerelor reale cu sensul pozitiv spre dreapta numărul *a* este poziţionat în dreapta numărului *b*;
- dacă $a<b$ şi $a=b$ spunem că „*a* este mai mic sau egal cu *b*” şi scriem $a\leq b$;
- dacă $a>b$ şi $a=b$ spunem că „*a* este mai mare sau egal cu *b*” şi scriem $a\geq b$.

Aceste tipuri de relaţii de inegalitate au câteva proprietăţi ce sunt sintetizate în tabelul următor.

Observaţii:

- Inegalitatea se păstrează, dacă se adună sau se scade din ambii membrii acelaşi termen sau dacă se înmulţeşte sau se împarte inegalitatea printr-un factor pozitiv;
- Prin înmulţirea sau împărţirea unei inegalităţi cu un factor negativ, rezultă o inegalitate cu sens opus.

Proprietățile relațiilor de inegalitate				
reflexivitatea	$x \le x,\ \forall x \in R$	$x \ge x,\ \forall x \in R$	-	-
antisimetria	$\forall x, y \in R$, dacă $x \le y,\ y \le x \Rightarrow x = y$	$\forall x, y \in R$, dacă $x \ge y,\ y \ge x \Rightarrow x = y$	-	-
tranzitivitatea	$\forall x, y, z \in R$, dacă $x \le y,\ y \le z \Rightarrow x \le z$	$\forall x, y, z \in R$, dacă $x \ge y,\ y \ge z \Rightarrow x \ge z$	$\forall x, y, z \in R$, dacă $x < y,\ y < z \Rightarrow x < z$	$\forall x, y, z \in R$, dacă $x > y,\ y > z \Rightarrow x > z$

Proprietăți de compatibilitate între relația de egalitate și operațiile cu numere reale			
Dacă	$c \in R$	atunci	$a < b \Leftrightarrow a + c < b + c$ și $a < b \Leftrightarrow a - c < b - c$
	$c > 0$		$a < b \Leftrightarrow a \cdot c < b \cdot c$ și $a < b \Leftrightarrow a : c < b : c$
	$c < 0$		$a < b \Leftrightarrow a \cdot c > b \cdot c$ și $a < b \Leftrightarrow a : c > b : c$
Dacă	$c \in R$	atunci	$a > b \Leftrightarrow a + c > b + c$ și $a > b \Leftrightarrow a - c > b - c$
	$c > 0$		$a > b \Leftrightarrow a \cdot c > b \cdot c$ și $a > b \Leftrightarrow a : c > b : c$
	$c < 0$		$a > b \Leftrightarrow a \cdot c < b \cdot c$ și $a > b \Leftrightarrow a : c < b : c$
Dacă	$c \in R$	atunci	$a \le b \Leftrightarrow a + c \le b + c$ și $a \le b \Leftrightarrow a - c \le b - c$
	$c > 0$		$a \le b \Leftrightarrow a \cdot c \le b \cdot c$ și $a \le b \Leftrightarrow a : c \le b : c$
	$c < 0$		$a \le b \Leftrightarrow a \cdot c \ge b \cdot c$ și $a \le b \Leftrightarrow a : c \ge b : c$
Dacă	$c \in R$	atunci	$a \ge b \Leftrightarrow a + c \ge b + c$ și $a \ge b \Leftrightarrow a - c \ge b - c$
	$c > 0$		$a \ge b \Leftrightarrow a \cdot c \ge b \cdot c$ și $a \ge b \Leftrightarrow a : c \ge b : c$
	$c < 0$		$a \ge b \Leftrightarrow a \cdot c \le b \cdot c$ și $a \ge b \Leftrightarrow a : c \le b : c$
Dacă	$a < b$ și $c < d$	atunci	$a + c < b + d$
Dacă	$a \le b$ și $c \le d$	atunci	$a + c \le b + d$
Dacă	$a < b$ și $c \le d$	atunci	$a + c < b + d$
Dacă	$0 < a < b$ și $0 < c < d$	atunci	$0 < a \cdot c < b \cdot d$
Dacă	$0 \le a \le b$ și $0 \le c \le d$	atunci	$0 \le a \cdot c \le b \cdot d$
Dacă	$0 < a < b$ și $0 < c \le d$	atunci	$0 < a \cdot c < b \cdot d$

Inegalități cunoscute:

- $x^2 \ge 0$; $(x - y)^2 \ge 0$; $(x + y)^2 \ge 0$;
- $m_h(x, y) \le m_g(x, y) \le m_a(x, y)$ - inegalitatea mediilor;

pentru $x = y$ are loc egalitatea;

- $x \le m_h(x, y) \le m_g(x, y) \le m_a(x, y) \le y$ - teorema inegalității mediilor.

Exemple:

- Demonstrăm că $\forall x \in R_+$, are loc inegalitatea: $x + \frac{1}{x} \geq 2$.

$x + \frac{1}{x} - 2 \geq 0 \Rightarrow \frac{x^2 - 2x + 1}{x} \geq 0 \Rightarrow \frac{(x-1)^2}{x} \geq 0$, inegalitate adevărată, deoarece $x \in R_+^*$, iar $(x-1)^2 \geq 0$;

- Demonstrăm că $\forall a, b \in R_+^*$, are loc inegalitatea: $\frac{a+b}{a^2+b^2} \leq \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)$.

$\frac{a+b}{a^2+b^2} \leq \frac{1}{2} \cdot \frac{a+b}{ab} \Rightarrow \frac{1}{a^2+b^2} \leq \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{ab} \Rightarrow 2ab \leq a^2 + b^2 \Rightarrow a^2 + b^2 - 2ab \geq 0 \Rightarrow (a-b)^2 \geq 0$.

D.I.4. INECUAŢII DE GRADUL I

O inecuaţie de gradul I cu o necunoscută poate avea una din următoarele forme:

- $ax + b < 0$,
- $ax + b > 0$,
- $ax + b \leq 0$,
- $ax + b \geq 0$,

unde $a, b \in R$, $a \neq 0$, cu *a* şi *b* coeficienţii inecuaţiei (*a* = coeficientul necunoscutei, *b* = termenul liber), iar *x* variabila sau necunoscuta.

Rezolvarea unei inecuaţii presupune determinarea tuturor soluţiilor sale. Dacă inecuaţia nu are nici o soluţie, atunci vom scrie mulţimea vidă.

Inecuaţiile echivalente sunt acele inecuaţii cu aceeaşi mulţime de soluţii, ele putându-se obţine, dacă se aplică următoarele reguli:

- se trec termeni dintr-un membru în celălalt cu semn schimbat;
- se adună sau se scade acelaşi număr din ambii membri ai inecuaţiei;
- se înmulţesc sau se împart ambii membri ai inecuaţiei cu un număr pozitiv, păstrând sensul inegalităţii;
- se înmulţesc sau se împart ambii membri ai inecuaţiei cu un număr negativ, schimbând sensul inegalităţii.

Etapele rezolvării unei inecuaţii de gradul I sunt exemplificate în cele ce urmează şi sunt valabile şi pentru celelalte tipuri de inecuaţii amintite anterior:

- $ax + b < 0 \;\big|\, -b \Rightarrow ax < -b,\;\; a, b \in R,\; a \neq 0,\; x \in Z$;
- $ax < -b \;\Big|\; \cdot \frac{1}{a}$, dacă $a > 0 \Rightarrow x < -\frac{b}{a}$ şi este soluţia inecuaţiei date: $\Rightarrow S = \left\{x \in Z \middle| x < -\frac{b}{a}\right\}$;
- $ax < -b \;\Big|\; \cdot \frac{1}{a}$, dacă $a;0 \Rightarrow x > -\frac{b}{a}$ şi este soluţia inecuaţiei date: $\Rightarrow S = \left\{x \in Z > -\frac{b}{a}\right\}$.

Exemple:

- $\sqrt{3}x + \sqrt{27} < 0 \Rightarrow \sqrt{3}x + 3\sqrt{3} < 0 \Rightarrow \sqrt{3} \cdot (x+3) < 0 \Rightarrow x + 3 < 0 \Rightarrow x < -3$;
- $12x + 8 \geq 0 \Rightarrow 12x \geq -8 \Rightarrow x \geq -\frac{8}{12} \Rightarrow x \geq -\frac{2}{3}$;
- $7x - 10 + 2 \cdot (x-7) > 8 \cdot (x-1) \Rightarrow 7x - 10 + 2x - 14 > 8x - 8 \Rightarrow x > 16$;
- $\frac{-3x-4}{3} + \frac{16+9x}{4} \leq 6x + 9 \Rightarrow \frac{-12x - 16 + 48 + 27x}{12} \leq \frac{72x+36}{12} \Rightarrow \frac{15x+32}{12} \leq \frac{72x+36}{12}$

  $15x + 32 \leq 72x + 36 \Rightarrow -57x \leq 4 \;\;\big|\cdot(-1) \Rightarrow 57x \geq -4 \Rightarrow x \geq -\frac{4}{57}$.

D.I.5. PROBLEME CARE SE REZOLVĂ CU AJUTORUL ECUAŢIILOR ŞI INECUAŢIILOR

Etapele de rezolvare a problemelor cu ajutorul ecuaţiilor şi inecuaţiilor sunt:

- evidenţierea datelor cunoscute şi necunoscute şi notarea cu o literă a necunoscutei;
- stabilirea intervalului în care poate lua valori necunoscuta;
- scrierea, utilizând necunoscuta, a relaţiilor date în enunţul problemei şi obţinerea unei ecuaţii sau inecuaţii;
- rezolvarea ecuaţiei sau inecuaţiei, inclusiv verificarea soluţiei;
- interpretarea rezultatului.

Exemple:

- Suma a două numere reale este 66, iar diferenţa lor este 12. Aflaţi numerele.

$$\begin{cases} a+b=66 \\ a-b=12 \end{cases} \Rightarrow 2a=78 \Rightarrow a=39 \Rightarrow b=27.$$

Verificare: $\begin{cases} 39+27=66 \\ 39-27=12 \end{cases}$ adevărat.

- Suma a trei numere pare consecutive este 408. Aflaţi numerele.

Fie $\begin{cases} x=a \\ y=a+2 \\ z=y+2=a+4 \end{cases}$

$$\Rightarrow x+y+z=a+a+2+a+4=408 \Rightarrow 3a=402 \Rightarrow a=134$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=134 \\ y=136 \\ z=138 \end{cases}$$

Verificare: $x+y+z=134+136+138=408$.

D.I.6. EXERCIŢII ŞI PROBLEME

1. Se dau numerele reale a, b, c., astfel încât: $a+3b=7$ şi $2b-5c=9$. Determinaţi:

a) $a+5b-5c$;

b) $a+b+5c$;

c) $2a+10b-10c$.

Rezolvare:.

a) $\begin{cases} a+3b \quad\;\; =7 \\ \quad\; 2b-5c=9 \end{cases}$, rezultă prin adunarea membru cu membru că: $a+5b-5c=16$,

b) $\begin{cases} a+3b \quad\;\; =7 \\ \quad\; 2b-5c=9 \end{cases}$, rezultă prin scăderea membru cu membru că: $a+b+5c=-2$,

c) $\begin{cases} a+3b \quad\;\; =7 \;\big|\cdot 2 \\ \quad\; 2b-5c=9 \big|\cdot 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a+6b \quad\;\; =14 \\ \quad\; 4b-10c=18 \end{cases}$, rezultă prin adunarea membru cu membru că:

$2a+10b-10c=32$

2. Pentru $a+b=7$ şi $ab=9$, calculaţi: a^3+b^3.

Rezolvare:

$$a^3+b^3=(a+b)\cdot\left(a^2-ab+b^2\right)=(a+b)\cdot\left[(a+b)^2-3ab\right]$$

$$\Rightarrow a^3+b^3=7\cdot(49-27)=7\cdot 22=154.$$

3. Demonstraţi egalitatea: $\left(\sqrt{x-1}-1\right)^2 = x-2\sqrt{x-1}$.

Rezolvare:.

$\left(\sqrt{x-1}-1\right)^2 = x-1-2\sqrt{x-1}+1 = x-2\sqrt{x-1}$.

4. Arătaţi că, dacă $x+y=2\sqrt{x-1}+4\sqrt{y-4}$, atunci $x=2$ şi $y=8$.

Rezolvare:.

$x+y=2\sqrt{x-1}+4\sqrt{y-4} \Rightarrow x+y-2\sqrt{x-1}-4\sqrt{y-4}=0 \Rightarrow \left(\sqrt{x-1}-1\right)^2+\left(\sqrt{y-4}-2\right)^2=0$

$\Leftrightarrow \begin{cases}\sqrt{x-1}-1=0\\ \sqrt{y-4}-2=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\sqrt{x-1}=1\\ \sqrt{y-4}=2\end{cases} \Big|(\ )^2 \Rightarrow \begin{cases}x-1=1\\ y-4=4\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x=2\\ y=8\end{cases}$.

5. Fie $x \in R$, astfel încât $x\cdot\left(x^2-2x+5\right)=10$. Arătaţi că $x=2$.

Rezolvare:.

$x\cdot\left(x^2-2x+5\right)=10 \Rightarrow x^3-2x^2+5x-10=0 \Rightarrow x^2\cdot(x-2)+5\cdot(x-2)=0 \Rightarrow (x-2)\cdot\left(x^2+5\right)=0$

$\Rightarrow \begin{cases}x-2=0 \Rightarrow x=2\\ \text{sau}\\ x^2+5=0 \ \text{ imposibil}\end{cases}$

6. Rezolvaţi ecuaţia: $2{,}5x-4{,}7=3(1{,}5x+2)$.

Rezolvare:.

$2{,}5x-4{,}7=3(1{,}5x+2) \Rightarrow 2{,}5x-4{,}7=4{,}5x+6 \Rightarrow -10{,}7=2x \Rightarrow x=-5{,}35$.

7. Determinaţi numărul real m pentru care ecuaţia
$3\cdot(m-1)\cdot(x+2)-2\cdot(2m-1)\cdot(2x+1)=7x+3mx-5$ are soluţia -3.

Rezolvare:.

$-3\cdot(m-1)+10\cdot(2m-1)=-21-9m-5$

$-3m+3+20m-10=-21-9m-5 \Rightarrow -3m+3+20m-10+21+9m+5=0$

$26m-2=0 \Rightarrow 26m=2 \Rightarrow m=\dfrac{1}{13}$.

8. Rezolvaţi ecuaţia: $\dfrac{x}{2}+\dfrac{x}{6}+\ldots\dfrac{x}{2011\cdot 2012}=2011$.

Rezolvare:.

$x\cdot\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{6}+\ldots\dfrac{1}{2011\cdot 2012}\right)=2011 \Rightarrow x\cdot\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}+\ldots\dfrac{1}{2011}-\dfrac{1}{2012}\right)=2011$

$x\cdot\left(1-\dfrac{1}{2012}\right)=2011 \Rightarrow x\cdot\dfrac{2011}{2012}=2011 \Rightarrow x=2012$

9. Rezolvaţi ecuaţia: $|2x+3|\cdot|x-1|+\sqrt{4x^2+12x+9}\cdot|2x-2|=0$.

Rezolvare:.

$|2x+3|\cdot|x-1|+|2x+3|\cdot|2x-2|=0 \Rightarrow |x-1|+2\cdot|x-1|=0 \Rightarrow 3\cdot|x-1|=0 \Rightarrow |x-1|=0$

$\Rightarrow x=1$

10. Determinaţi pentru ce valori ale numărului real *m*, $m \neq 0$, ecuaţiile $2mx + m + 2 = 0$ şi $(m+1)x + 2m + 1 = 0$ au aceeaşi soluţie.

***Rezolvare:*.**

Rădăcina unei ecuaţii trebuie să verifice şi cealaltă ecuaţie.

$$2mx + m + 2 = 0 \Rightarrow 2mx = -m - 2 \Rightarrow x = \frac{-m-2}{2m}$$

$$(m+1)\cdot\frac{-m-2}{2m} + 2m + 1 = 0 \Rightarrow \frac{-(m+1)\cdot(m+2) + 4m^2 + 2m}{2m} = 0 \Rightarrow -(m+1)\cdot(m+2) + 4m^2 + 2m = 0$$

$$\Rightarrow -m^2 - 2m - m - 2 + 4m^2 + 2m = 0 \Rightarrow 3m^2 - m - 2 = 0 \Rightarrow 3m^2 - 3m + 2m - 2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3m\cdot(m-1) + 2\cdot(m-1) = 0 \Rightarrow (m-1)\cdot(3m+2) = 0 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} m - 1 = 0 \\ \text{sau} \\ 3m + 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = 1 \\ \text{sau} \\ m = -\dfrac{2}{3} \end{cases}$$

11. Demonstraţi că, $\forall x, y \in R_+$ are loc inegalitatea: $\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2} \leq \sqrt{\dfrac{a+b}{2}}$.

***Rezolvare:*.**

$$\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2} \leq \sqrt{\frac{a+b}{2}} \;|(\;)^2 \Rightarrow \frac{a + 2\sqrt{ab} + b}{4} \leq \frac{a+b}{2} \Rightarrow \frac{a + 2\sqrt{ab} + b}{4} \leq \frac{2a+2b}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a + 2\sqrt{ab} + b \leq 2a + 2b \Rightarrow a + 2\sqrt{ab} + b \geq 0 \Rightarrow \left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2 \geq 0$$

12. Aflaţi $x, y, z \in R$, astfel încât $\sqrt{x^2 - 8x + 20} + \sqrt{9y^2 - 6y + 26} + \sqrt{z^2 - 10z + 41} = 11$.

***Rezolvare:*.**

$$\sqrt{(x-4)^2 + 2^2} + \sqrt{(3y-1)^2 + 5^2} + \sqrt{(z-5)^2 + 4^2} \geq \sqrt{2^2} + \sqrt{5^2} + \sqrt{4^4} = 11$$

Rezultă că pentru a avea egalitate trebuie ca:

$$\begin{cases} x - 4 = 0 \\ 3y - 1 = 0 \\ z - 5 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = \dfrac{1}{3}. \\ z = 5 \end{cases}$$

13. Arătaţi că $\dfrac{x^2}{x-1} + \dfrac{y^2}{y-1} \geq 8$, $\forall x, y > 1$.

***Rezolvare:*.**

Notăm: $x - 1 = m \Rightarrow m > 0$, $y - 1 = n \Rightarrow n > 0$ şi obţinem:

$$\frac{(m+1)^2}{m} + \frac{(n+1)^2}{n} \geq 8,\ \forall x, y > 1 \Rightarrow \frac{m^2 + 2m + 1}{m} + \frac{n^2 + n + 1}{2} \geq 8 \Rightarrow m + 2 + \frac{1}{m} + n + 2 + \frac{1}{n} \geq 8.$$

Am demonstrat anterior că pentru $\forall x \in R_+$, are loc inegalitatea: $x + \dfrac{1}{x} \geq 2$, rezultă că:

$$m + \frac{1}{m} + n + \frac{1}{n} \geq 4.$$

14. Determinaţi $a, b, c \in R$, care verifică egalitatea:

$$\sqrt{a-1}+\sqrt{2\cdot(b-2)}+\sqrt{3\cdot(c-3)}=\frac{a+b+c}{2}.$$

***Rezolvare:*.**

Ştim că media geometrică e mai mică sau egală decât media aritmetică, prin urmare avem:

$$\begin{cases}\sqrt{a-1}\le\dfrac{a-1+1}{2}=\dfrac{a}{2}\\ \sqrt{2\cdot(b-2)}\le\dfrac{2+b-2}{2}=\dfrac{b}{2}\text{, însumând relaţiile obţinem:}\\ \sqrt{3\cdot(c-3)}\le\dfrac{3+c-3}{2}=\dfrac{c}{2}\end{cases}$$

$\sqrt{a-1}+\sqrt{2\cdot(b-2)}+\sqrt{3\cdot(c-3)}\le\frac{a+b+c}{2}$, inegalitate ce se transcrie în egalitate, deoarece avem o sumă de 3 radicali: $\sqrt{a-1}+\sqrt{2\cdot(b-2)}+\sqrt{3\cdot(c-3)}=\frac{a+b+c}{2}$.

15. a) Demonstraţi că: $\frac{2}{n\cdot(n+2)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}$, $\forall n\in N^*$.

b) Rezolvaţi în Z inecuaţia: $\frac{2x}{1\cdot3}+\frac{2x}{3\cdot5}+...+\frac{2x}{99\cdot101}>1$.

***Rezolvare:*.**

a) $\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}=\frac{n+2-n}{n\cdot(n+2)}=\frac{2}{n\cdot(n+2)}$;

b)
$$x\cdot\left(\frac{2}{1\cdot3}+\frac{2}{3\cdot5}+...+\frac{2}{99\cdot101}\right)>1\Rightarrow x\cdot\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+...+\frac{1}{99}-\frac{1}{101}\right)>1\Rightarrow$$
$$x\cdot\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{101}\right)>1\Rightarrow x\cdot\frac{100}{101}>1\Rightarrow x\ge2\Rightarrow x\in\{2;3;4;5;...\}$$

16. Demonstraţi că $a(2-a)+b(4-b)+c(6-c)\le14$, $\forall a,b,c\in R$.

***Rezolvare:*.**

$$a(2-a)+b(4-b)+c(6-c)\le14\Rightarrow 2a-a^2+4b-b^2+6c-c^2-14\le0\ \big|\cdot(-1)$$
$$\Rightarrow a^2-2a+1+b^2-4b+4+c^2-6c+9\ge0\Rightarrow(a-1)^2+(b-2)^2+(c-3)^2\ge0,\ \forall a,b,c\in R.$$

17. Aflaţi $x\in R$ pentru care $x^2=\frac{8}{7}+\frac{9}{14}+...+\frac{350}{2401}-\left(1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{343}\right)$.

***Rezolvare:*.**

$$x^2=\left(\frac{8}{7}-1\right)+\left(\frac{9}{14}-\frac{1}{2}\right)+...+\left(\frac{350}{2401}-\frac{1}{343}\right)\Rightarrow x^2=\frac{1}{7}+\frac{2}{14}+...+\frac{343}{2401}\Rightarrow$$
$$\Rightarrow x^2=\underbrace{\frac{1}{7}+\frac{1}{7}+...+\frac{1}{7}}_{343\text{ termeni}}\Rightarrow x^2=343\cdot\frac{1}{7}\Rightarrow x^2=49\Rightarrow(x-7)\cdot(x+7)=0\Rightarrow$$
$$\Rightarrow x=\pm7$$

18. Fie $x \in R^*$ şi numerele $a = x + \frac{1}{x}$, $b = \frac{x}{x^2 + x + 1}$, $c = \frac{x^2}{x^4 + x^2 + 1}$. Arătaţi că $a - \frac{b}{c} \in N$.

Rezolvare:.

$$a - \frac{b}{c} = x + \frac{1}{x} + \frac{\frac{x}{x^2+x+1}}{\frac{x^2}{x^4+x^2+1}} = x + \frac{1}{x} - \frac{x^4+x^2+1}{x\cdot\left(x^2+x+1\right)} = \frac{x^4+x^3+x^2+x+1-x^4-1}{x\cdot\left(x^2+x+1\right)} =$$

$$= \frac{x^3+x^2+x}{x^3+x^2+x} = 1 \in N$$

19. Rezolvaţi ecuaţia: $\frac{x-\sqrt{2}}{x-\sqrt{3}} = \frac{x-\sqrt{3}}{x-\sqrt{2}}$, $x \in R \setminus \left\{\sqrt{2};\ \sqrt{3}\right\}$.

Rezolvare:.

$$\left(x-\sqrt{2}\right)^2 = \left(x-\sqrt{3}\right)^2 \Rightarrow x^2 - 2\sqrt{2}\cdot x + 2 = x^2 - 2\sqrt{3}\cdot x + 3 \Rightarrow 2\sqrt{3}\cdot x - 2\sqrt{2}\cdot x = 1 \Rightarrow$$

$$x\cdot\left(2\sqrt{3}-2\sqrt{2}\right) = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{2\sqrt{3}-2\sqrt{2}} \Rightarrow x = \frac{2\sqrt{3}+2\sqrt{2}}{12-8} \Rightarrow x = \frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{2}$$

20. Fie $a, b, c, x, y, z \in R$, astfel încât

$$x = bc + \frac{1}{a},\quad y = ac + \frac{1}{b},\quad z = ab + \frac{1}{c},\quad ax + by + cz = 1.$$

Deduceţi o relaţie între a,b,c şi x,y,z.

Rezolvare:.

$$a\cdot\left(bc + \frac{1}{a}\right) + b\cdot\left(ac + \frac{1}{b}\right) + c\cdot\left(ab + \frac{1}{c}\right) = 1$$

$$abc + 1 + abc + 1 + abc + 1 = 1 \Rightarrow 3abc = -2 \Rightarrow abc = -\frac{2}{3}$$

$$\begin{cases} x = bc + \frac{1}{a} = \frac{abc+1}{a} = \frac{-\frac{2}{3}+1}{a} = \frac{1}{3a} \\ y = ac + \frac{1}{b} = \frac{abc+1}{b} = \frac{-\frac{2}{3}+1}{b} = \frac{1}{3b} \\ z = ab + \frac{1}{c} = \frac{abc+1}{c} = \frac{-\frac{2}{3}+1}{c} = \frac{1}{3c} \end{cases}$$

E1. ORGANIZAREA DATELOR

E.I.1. PRODUSUL CARTEZIAN. REPREZENTAREA PUNCTELOR ÎN PLAN. DISTANŢA DINTRE DOUĂ PUNCTE DIN PLAN

Definiţie: Numim ***produs cartezian al mulţimilor nevide A şi B*** mulţimea perechilor ordonate (a,b), unde $a \in A$ şi $b \in B$: $A \times B = \{(a,b) | a \in A \text{ şi } b \in B\}$.

Observaţii: Într-un produs cartezian contează ordinea scrierii elementelor, adică $(a,b) \neq (b,a)$ şi $A \times B \neq B \times A$. De fapt, perechile ordonate $(a,b) = (c,d) \Leftrightarrow a = c$ şi $b = d$.

Regula produsului: Dacă mulţimile A şi B sunt finite, iar

$$\text{card}A = p \text{ şi } \text{card}B = q \Rightarrow \text{card}(A \times B) = m \cdot n.$$

Exemple:

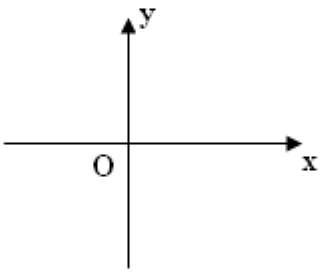
- Dacă $A = \left\{-\frac{1}{2}; \frac{5}{2}\right\}$ şi $B = \left\{-\frac{3}{2};\ 0;\ \frac{1}{2}\right\}$, atunci:

  $A \times B = \left\{\left(-\frac{1}{2}; -\frac{3}{2}\right), \left(-\frac{1}{2}; 0\right), \left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right), \left(\frac{5}{2}; -\frac{3}{2}\right), \left(\frac{5}{2}; 0\right), \left(\frac{5}{2}; \frac{1}{2}\right)\right\}$;

- În clasa mea, în care învăţ, se află 25 de elevi, dintre care 7 fete şi 18 băieţi; atunci numărul perechilor distincte fete-băieţi este de $7 \cdot 18 = 126$, conform regulii produsului.

Reprezentarea punctelor în plan cu ajutorul sistemului de axe ortogonale

Sistem de axe ortogonale = figura formată din două axe a numerelor, care sunt perpendiculare.

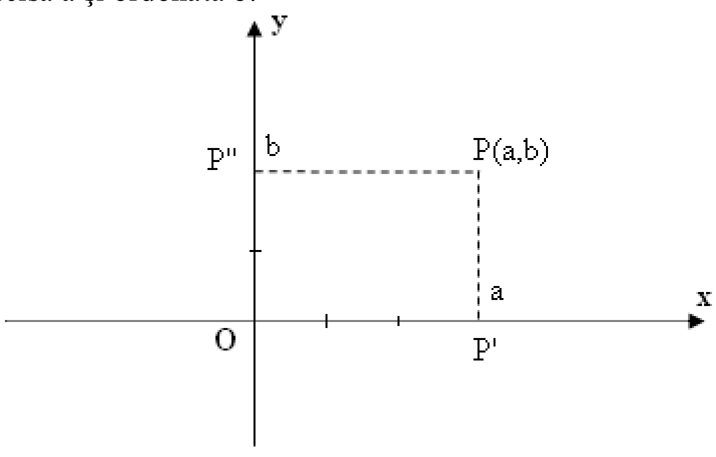


axa Ox – axa absciselor
axa Oy – axa ordonatelor
O – originea sistemului

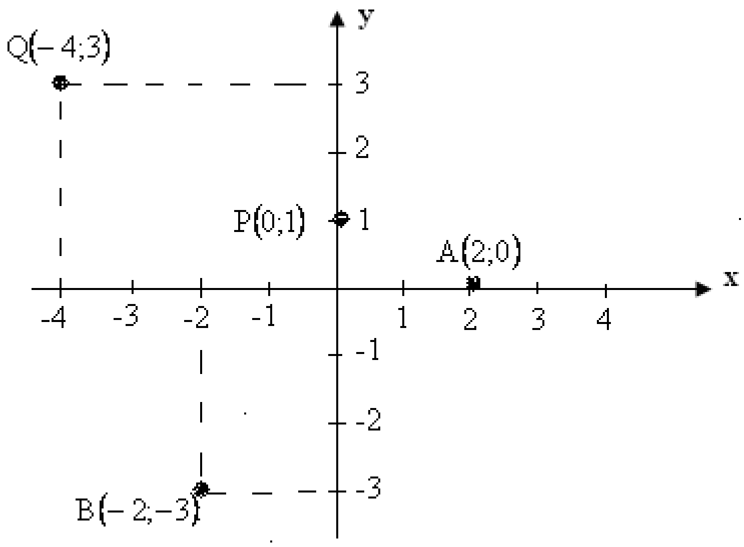
Asociem fiecărei perechi de numere raţionale (a,b) un punct în plan obţinut astfel:

- pe axa Ox reprezentăm punctul P’ de coordonată a;
- pe axa Oy reprezentăm punctul P’’ de coordonată b;
- prin punctul P’ ducem o paralelă la axa Oy, iar prin punctul P’’ ducem o paralelă la axa Ox;
- la intersecţia paralelelor este punctul P (a,b).

Citim: punctul P de abscisă a şi ordonată b.



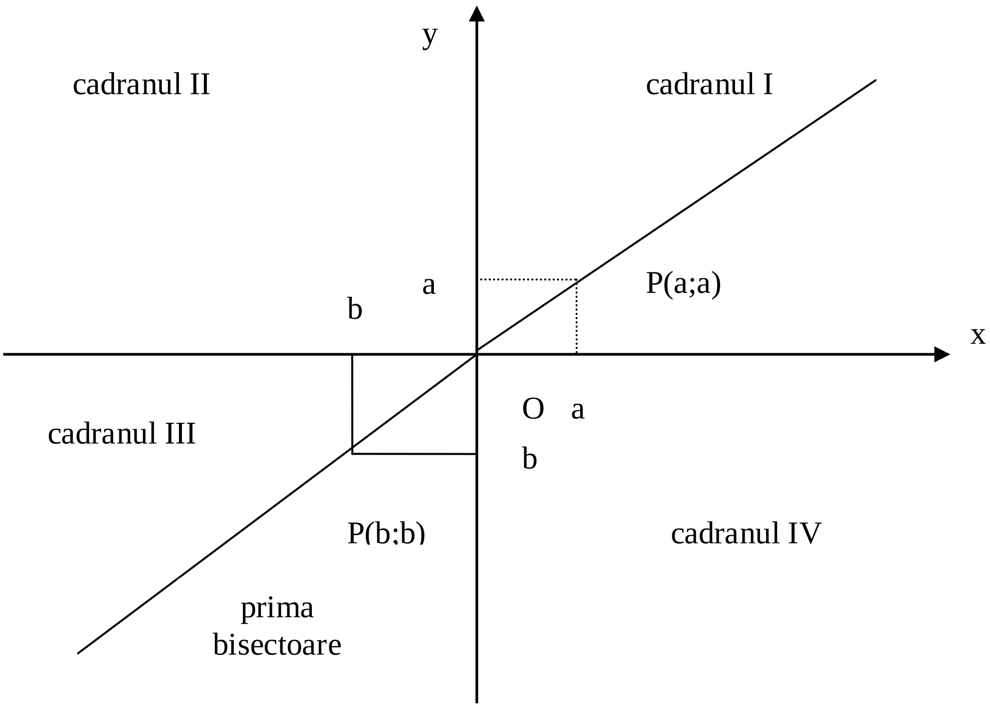
Exemplu: În figura de mai jos este redată reprezentarea punctelor într-un sistem de axe ortogonale pentru următoarele puncte: $A(2;0)$; $B(-2;-3)$; $P(1;0)$; $Q(-4;3)$.



Precizare:

- Punctele aflate pe prima bisectoare (bisectoarea cadranelor I şi III) au coordonate egale;

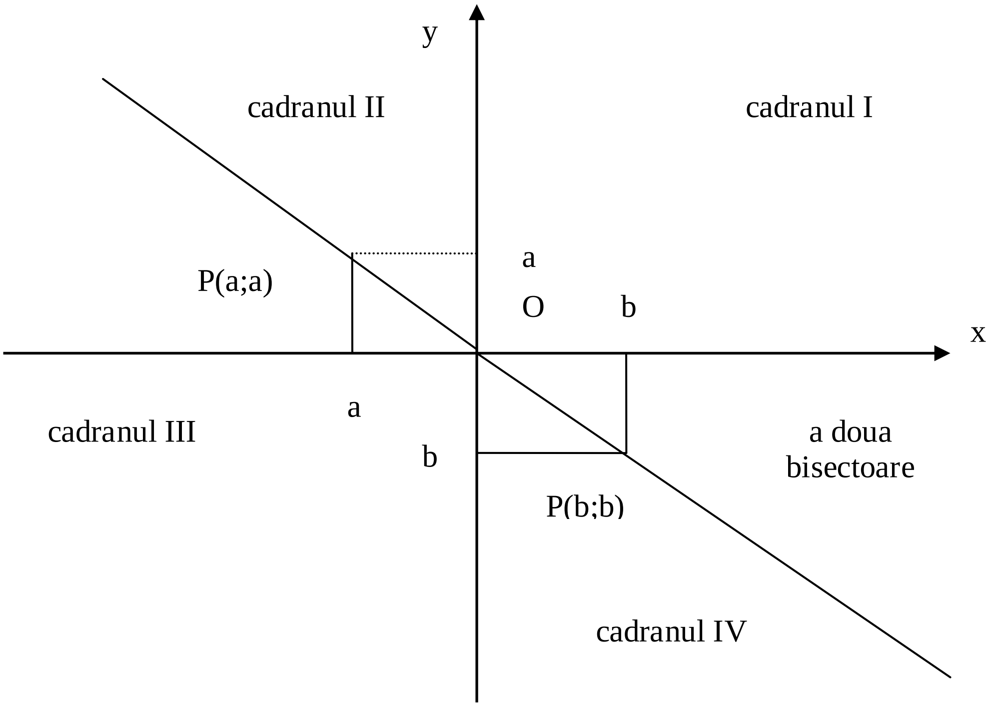
Exemplu: $A(5;5)$; $B(-5;-5)$.



Precizare:

- Punctele aflate pe a doua bisectoare (bisectoarea cadranelor II şi IV) au coordonate opuse.

Exemplu: $A(-5;5)$; $B(5;-5)$.



Distanţa dintre două puncte: Fie punctele $A(x_1;y_1)$ şi $B(x_2;y_2)$ reprezentate într-un sistem ortogonal de axe xOy. Distanţa dintre cele două puncte este dată de relaţia:

$$AB=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}.$$

Exemple:

- distanţa dintre punctele $A(2;3)$ şi $B(-2;-4)$ este:

  $AB=\sqrt{(-2-2)^2+(-4-3)^2}=\sqrt{16+49}=\sqrt{65}$;
- Ne propunem să determinăm valoarea reală a lui *a*, ştiind că $A(1;a)$ şi $B(0;4)$, iar AB=6.

  $AB=\sqrt{(0-1)^2+(4-a)^2}=\sqrt{1+(4-a)^2}=6$

  $\sqrt{1+(4-a)^2}=6 \mid (\ )^2 \Rightarrow 1+(4-a)^2=36 \Rightarrow (4-a)^2=35 \Rightarrow 4-a=\pm\sqrt{35} \Rightarrow$

  $\Rightarrow 4\pm\sqrt{35}=a$

Mijlocul unui segment. Pentru oricare două puncte $A(x_A;y_A)$ şi $B(x_B;y_B)$, coordonatele mijlocului M a segmentului [AB] sunt:

$$x_M=\frac{x_A+x_B}{2},\ y_M=\frac{y_A+y_B}{2}.$$

Exemple:

- Mijlocul segmentului [AB], unde $A(2;3)$ şi $B(-2;-4)$ este $M\left(0;-\frac{1}{2}\right)$

$$x_M=\frac{2+(-2)}{2}=0,\ y_M=\frac{-4+3}{2}=-\frac{1}{2};$$

- Fie punctele $A(5;-1)$ şi $M(2;4)$. Determinaţi coordonatele punctului B, ştiind că M este mijlocul segmentului [AB].

$\begin{cases}x_A+x_B=2x_M\\ y_A+y_B=2y_M\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x_B=2x_M-x_A\\ y_B=2y_M-y_A\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x_B=-1\\ y_B=9\end{cases} \Rightarrow B=(-1;9).$

E.I.2. REPREZENTAREA ŞI INTERPRETAREA UNOR DEPENDENŢE FUNCŢIONALE PRIN TABELE, DIAGRAME, GRAFICE

Fie A şi B două mulţimi nevide. Se spune că există o ***dependenţă funcţională*** de la mulţimea A la mulţimea B, dacă oricărui element al mulţimii A i se asociază un unic element din mulţimea B.

Regula prin care fiecărui element $a \in A$ i se asociază un element $b \in B$ se numeşte ***lege de corespondenţă*** sau ***relaţie funcţională*** de la mulţimea A la mulţimea B.

O regulă care stabileşte o corespondenţă $x \to y$ între elementele mulţimilor A şi B ($x \in A$ şi $y \in B$) este o relaţie funcţională de la A la B, dacă:

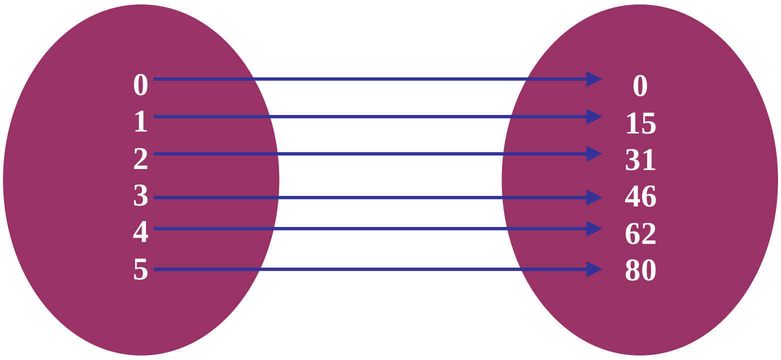
- fiecărui element $x \in A$ i se asociază un element $y \in B$;
- dacă $x \to y$ şi $x \to z$, atunci $y = z$.

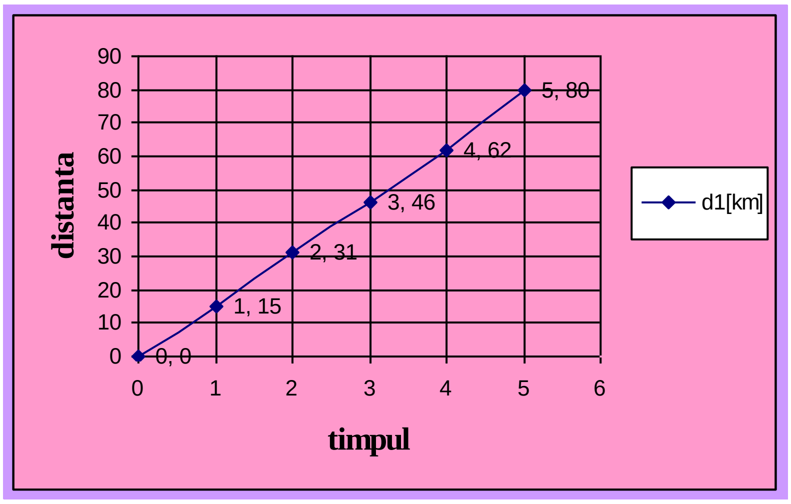
O dependenţă funcţională de la mulţimea A la mulţimea B se poate reprezenta printr-un tabel, printr-o diagramă sau printr-un grafic.

Exemplu: Prezint în cele ce urmează, sinteza tabelară, diagrama şi graficul variaţiei mişcării pentru un automobil.

t [h]	0	1	2	3	4	5
d[km]	0	15	31	46	62	80

t – timp, d -distanţă





Precizări: *Alte diferite exemple de dependenţe funcţionale vor fi prezentate în Partea a V-a: Matematica şi calculatorul.*

E.I.3. PROBABILITATEA REALIZĂRII UNOR EVENIMENTE

Probabilitatea producerii unui eveniment presupune raportul dintre numărul cazurilor favorabile (f) producerii evenimentului şi numărul total de cazuri posibile (p) adică: $P = \frac{f}{p}$.

Exemplu: Probabilitatea ca la aruncarea unui zar să apară un număr multiplu de 2 este de $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$, deoarece avem 3 cazuri favorabile, feţele: 2, 4 şi 6, respectiv 6 cazuri posibile, adică cele 6 feţe ale zarului.

E.I.4. EXERCIŢII ŞI PROBLEME

1. Verificaţi coliniaritatea punctelor: $A(5,3);\ B(1,-3);\ C(3,0)$.

Rezolvare: Punctele A, B, C sunt coliniare, dacă are loc una dintre relaţiile:
AB+BC=AC sau AC+CB=AB sau BA+AC=BC.

$$AB = \sqrt{(1-5)^2 + (-3-3)^2} = \sqrt{16+36} = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}$$

$$AC = \sqrt{(3-5)^2 + (0-3)^2} = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$$

$$BC = \sqrt{(3-1)^2 + (0+3)^2} = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$$

$$\Rightarrow AB = AC + BC = \sqrt{13} + \sqrt{13} = 2\sqrt{13}.$$

2. Ştiind că $A(-2,1);\ B(3,5);\ C(7,0)$, calculaţi lungimile laturilor triunghiului ABC şi verificaţi, dacă el este isoscel.

Rezolvare:

$$AB = \sqrt{(3+2)^2 + (5-1)^2} = \sqrt{25+16} = \sqrt{41}$$

$$AC = \sqrt{(7+2)^2 + (0-1)^2} = \sqrt{82} = 2\sqrt{41}$$

$$BC = \sqrt{(7+2)^2 + (0-1)^2} = \sqrt{82} = 2\sqrt{41} = AC \ \Rightarrow \Delta ABC \text{ este isoscel.}$$

3. Fie $B\left(4+\sqrt{2}, \frac{5}{2}\right)$. Determinaţi coordonatele punctului A, ştiind că $M\left(-3, \frac{11}{2}\right)$ este mijlocul segmentului [AB].

Rezolvare:

$$\begin{cases} x_A + x_B = 2x_M \\ y_A + y_B = 2y_M \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_A = 2x_M - x_B \\ y_A = 2y_M - y_B \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_B = -10-\sqrt{2} \\ y_B = \frac{17}{2} \end{cases} \Rightarrow B = \left(-10-\sqrt{2}, \frac{17}{2}\right).$$

4. Fie $A(-2,10);\ B(3,5);\ C(7,2)$. Calculaţi perimetrul ΔABC.

Rezolvare:

$$AB = \sqrt{(3+2)^2 + (5-10)^2} = \sqrt{25+25} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$$

$$AC = \sqrt{(7+2)^2 + (2-10)^2} = \sqrt{81+64} = \sqrt{145}$$

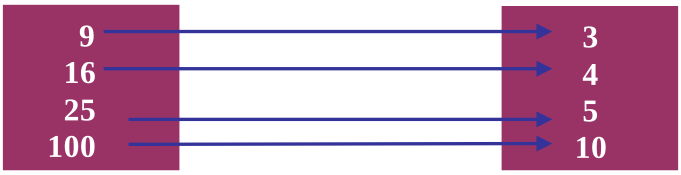
$$BC = \sqrt{(7-3)^2 + (2-5)^2} = \sqrt{16+9} = 5$$

$$\Rightarrow P_{\Delta ABC} = AB + AC + BC = 5\left(\sqrt{2}+1\right) + \sqrt{145}$$

5. Completaţi tabelul de mai jos şi stabiliţi o dependenţă funcţională:

Rezolvare:

Aria pătratului	9	16	25	100
Latura pătratului	3	4	5	10



6. Determinaţi ce elemente trebuie să conţină mulţimea B pentru a stabili o relaţie funcţională $x \to y$, dată prin $y = 2x + 1$, de la mulţimea $A = \{-1,1,3,6,9\}$.

Rezolvare: De exemplu, pentru $x = 1 \Rightarrow y = 3$, ş.a.m.d $\Rightarrow B = \{-1,3,7,13,19\}$.

7. Fie numărul $a = \frac{9}{x}$, $x \in \{1,2,3,...,9\}$. Care este probabilitatea ca pentru o anume valoare a lui x să avem $a \in N$?

Rezolvare: Pentru $x \in \{1,3,9\} \Rightarrow a \in N \Rightarrow P = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$.

8. Se aruncă două zaruri. Care este probabilitatea ca suma numerelor obţinute să fie mai mică sau egală cu 4?

Rezolvare:

Numărul cazurilor posibile este: 36, deoarece pot nimeri, de exemplu, cu zarul 1 faţa 1, cu zarul 2 oricare din feţele de la 1 la 6 ale acestuia, şi tot aşa.

Numărul de cazuri favorabile este 6, deoarece avem următoarele situaţii:

	Zarul 1	Zarul 2	Suma
Faţa	1	1	2
Faţa	1	2	3
Faţa	1	3	4
Faţa	2	1	3
Faţa	2	2	4
Faţa	3	1	4

Rezultă că probabilitatea ca suma numerelor obţinute să fie mai mică sau egală cu 4 este de $\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$.

9. Care este probabilitatea ca alegând un număr oarecare din mulţimea $\{2,3,4,5,6,7,8,9,10,14\}$ acesta să fie un număr par?

Rezolvare:

Numărul cazurilor posibile este 10, iar numărul cazurilor favorabile este 6, adică mulţimea $\{2,4,6,8,10,14\}$, deci probabilitatea căutată este de $P = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$.

10. Într-o urnă sunt 10 bile albe, 8 bile roşii şi 11 bile albastre. Se extrag bile, în mod aleatoriu. Prima bilă extrasă este albă; nu se mai aşează la loc. Care este probabilitatea ca a doua bilă extrasă să fie tot albă?

Rezolvare:

Avem în total 29 de bile, dar o bilă albă din cele 10 albe se extrage, deci rămân 9 bile albe dintr-un total de 28 de bile, deci probabilitatea ca a doua bilă extrasă să fie tot albă este de $P = \frac{9}{28}$.

$\underbrace{\left(-\frac{2}{3}\right)\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)}_{\text{2011 fa}}$